

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

VYŠETŘOVÁNÍ FREKVENČNÍCH A FÁZOVÝCH CHARAKTERISTIK S VYUŽITÍM DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

LENKA TUROŇOVÁ

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV INTELIGENTNÍCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF INTELLIGENT SYSTEMS

VYŠETŘOVÁNÍ FREKVENČNÍCH A FÁZOVÝCH CHA- RAKTERISTIK S VYUŽITÍM DIFERENCIÁLNÍHO POČTU

FREQUENCY AND TRANSIENT RESPONSES BASED ON DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

LENKA TUROŇOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. VÁCLAV ŠÁTEK, Ph.D.

BRNO 2013

Abstrakt

Tato bakalářská práce se věnuje vyšetřování amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky lineárních elektrických obvodů. Porovnává klasické metody vyšetřování pomocí symbolicko-komplexního výpočtu s metodou vyšetřování s využitím diferenciálních rovnic. Pro grafické znázornění charakteristik v případě metody symbolicko-komplexního výpočtu byly pro demonstraci příkladů použity programy MATLAB a Maple. Dále bylo cílem vytvořit uživatelské rozhraní pro TKSL/C, které umožňuje zadávání diferenciálních rovnic a vykreslování amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky.

Abstract

This bachelor thesis deals with the investigation of amplitude and phase frequency responses of linear electrical circuits. It compares classical methods of investigation using a symbolic-complex method with investigation using differential equations. For graphical representation of the responses in the case of the symbolic-complex method there was used for demonstration of examples programs MATLAB and Maple. The aim of this work was also to create graphical user interface for TKSL/C, which allows input of differential equations and plotting frequency and transient responses.

Klíčová slova

Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika, lineární elektrické obvody, symbolicko-komplexní metoda, diferenciální rovnice, přechodový jev, metoda pulení intervalu, MATLAB, Maple, TKSL/C, C#.

Keywords

Amplitude and phase frequency responses, linear electrical circuits, symbolic-complex method, differential equations, transient, bisection method, MATLAB, Maple, TKSL/C, C#.

Citace

Lenka Turoňová: Vyšetřování frekvenčních a fázových charakteristik s využitím diferenciálního počtu, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2013

Vyšetřování frekvenčních a fázových charakteristik s využitím diferenciálního počtu

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením pana Ing. Václava Šátka, Ph.D. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

.....
Lenka Turoňová
28. dubna 2013

Poděkování

Tato práce byla vypracována s podporou projektu Nové kreativní týmy v prioritách vědeckého bádání, reg. č. CZ.1.07/2.3.00/30.0055 podpořeného Operačním programem Vzdělávání pro konkurenceschopnost a spolufinancovaného Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky. Na tomto místě bych také ráda poděkovala panu Ing. Václavu Šátkovi, Ph.D. za vedení a poskytnuté podněty a rady při přípravě této bakalářské práce. Také bych ráda poděkovala svému příteli za jeho podporu.

© Lenka Turoňová, 2013.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

1 Úvod	6
2 Frekvenční charakteristika	8
2.1 Přechodný jev	8
2.2 Amplitudová frekvenční charakteristika	9
2.3 Fázová frekvenční charakteristika	10
2.4 Základní popis RLC obvodů	10
2.4.1 Rezistor	10
2.4.2 Cívka	11
2.4.3 Kondenzátor	11
3 Filtry	12
3.1 Typy filtrů	12
3.2 Lineární pasivní filtry	13
3.3 Napěťový přenos	15
3.3.1 Dolní propust	16
3.3.2 Horní propust	16
3.3.3 Pásmová propust	17
3.3.4 Pásmová zádrž	18
4 Komplexní čísla	19
4.1 Matematické operace s komplexními čísly	19
4.2 Grafické znázornění komplexní čísel	20
4.3 Výhody a nevýhody výpočtu s komplexními čísly	20
5 Symbolicko-komplexní metoda řešení frekvenční charakteristiky	21
5.1 RL sériový obvod	21
5.1.1 Amplitudová frekvenční charakteristika	21
5.1.2 Fázová frekvenční charakteristika	22
5.2 RC sériový obvod	23
5.2.1 Amplitudová frekvenční charakteristika	23
5.2.2 Fázová frekvenční charakteristika	24
5.3 RLC sériový obvod	25
5.3.1 Amplitudová frekvenční charakteristika	25
5.3.2 Fázová frekvenční charakteristika	25
5.4 Grafické řešení	26

6	Diferenciální rovnice	29
6.1	Řešení diferenciálních rovnic	29
6.2	Analytické řešení diferenciálních rovnic	30
6.3	Numerické řešení diferenciálních rovnic	31
6.3.1	Eulerovy metody	32
6.3.2	Metody Runge-Kutta	33
6.3.3	Vícekrokové metody	33
6.4	Numerické metody pro řešení nelineárních rovnic	34
7	Výpočet frekvenční charakteristiky pomocí diferenciálních rovnic	35
7.1	Amplitudová frekvenční charakteristika	36
7.2	Fázová frekvenční charakteristika	37
8	Návrh a implementace uživatelského rozhraní	40
8.1	Požadavky na aplikaci	40
8.2	Návrh řešení problému	40
8.3	Algoritmy výpočtu frekvenční charakteristiky	41
8.3.1	Řešení přechodového jevu	43
8.3.2	Řešení přesnosti hodnoty amplitudy	43
8.3.3	Řešení rozsahu frekvence	44
8.4	Implementace aplikace	45
8.4.1	Zadávání vstupních rovnic	46
8.4.2	Nastavení parametrů	46
8.4.3	Výsledné grafy	47
8.4.4	Chybová hlášení	47
8.4.5	Výpočet frekvenční charakteristiky	47
9	Srovnání Maple, MATLAB a FAPC - TKSL/C	49
10	Závěr	53
A	Obrázky výsledné aplikace	55
B		58
B.1	Příklad s komplexními čísly	58
B.2	Příklad RL sériového obvodu	59
B.3	Příklad RC sériového obvodu	60
B.4	Příklad RLC sériového obvodu	62
B.5	Příklad RLC sériového obvodu	64
B.6	Příklad RLC paralelního obvodu	65
B.7	Příklad RC sériového obvodu	65
B.8	Příklad RLC sériového obvodu počítaného za pomoci diferenciálních rovnic	67
B.9	Příklad pro srovnání programů MATLAB, Maple a FAPC - TKSL/C (RLC obvod)	68
B.10	Příklad pro srovnání programů MATLAB, Maple a FAPC - TKSL/C	71
C	Obsah CD	76

Seznam obrázků

2.1	Graf frekvenční charakteristiky v komplexní (Gaussově) rovině	8
2.2	Přechodový děj u RLC sériového obvodu	9
2.3	Graf amplitudové frekvenční charakteristiky	10
2.4	Graf fázové frekvenční charakteristiky	10
3.1	Frekvenční amplitudová charakteristika RLC sériového obvodu: $R = 100[\Omega]$	14
3.2	Frekvenční amplitudová charakteristika RLC sériového obvodu: $R = 10[\Omega]$.	15
3.3	Frekvenční amplitudová charakteristika RLC sériového obvodu: $R = 1[\Omega]$. .	15
3.4	Frekvenční charakteristika - dolní propust	16
3.5	Dolní propust: vlevo - RC obvod; vpravo - LR obvod	16
3.6	Frekvenční charakteristika - horní propust	17
3.7	Horní propust: vlevo - CR obvod; vpravo - RL obvod	17
3.8	Frekvenční charakteristika - pásmová propust	17
3.9	RLC sériový obvod - pásmová propust	18
3.10	Frekvenční charakteristika - pásmová zádrž	18
3.11	Schéma obvodu - pásmová zádrž	18
4.1	Znázornění komplexního čísla z v Gaussově rovině	20
5.1	Schéma RL sériového obvodu	21
5.2	Graf výpočtu fázového posunu	22
5.3	Schéma RC sériového obvodu	23
5.4	Schéma RLC sériového obvodu	25
5.5	Schéma sérioparalelního obvodu	26
5.6	Fázový diagram - vektorový součin U_{R_1} a U_{L_1}	27
5.7	Fázový diagram - Thaletova kružnice	27
5.8	Fázový diagram - vektor U_{C_1}	27
5.9	Fázový diagram - vektor U_{R_2}	28
5.10	Fázový diagram - vektor I_2	28
5.11	Fázový diagram - vektor I	28
6.1	Obecné (červené šipky) a partikulární (modrá čára) řešení diferenciální rovnice	30
6.2	Přesné a přibližné řešení diferenciální rovnice	31
7.1	Schéma obvodu s ideální cívkou	35
7.2	Schéma obvodu s ideálním kondenzátorem	36
7.3	Schéma obvodu s ideálním odporem	36
7.4	Amplitudová frekvenční charakteristika - odečtení amplitud vstupního a vý- stupního napětí (program FAPC-TKSL/C)	37

7.5	Výsledná amplitudová frekvenční charakteristika (program FAPC-TKSL/C)	37
7.6	Fázová frekvenční charakteristika - odečtení času amplitud napětí (program FAPC-TKSL/C)	38
7.7	Fázová frekvenční charakteristika - vhodnější řešení (program FAPC-TKSL/C)	38
7.8	Výsledná fázová frekvenční charakteristika (program FAPC-TKSL/C)	39
8.1	Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu	42
8.2	Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program FAPC-TKSL/C)	42
8.3	Přechodový jev - porovnání hodnot dvou po sobě následujících amplitud (program FAPC-TKSL/C)	43
8.4	Přechodový jev - porovnání hodnot amplitud v kladném a záporném směru (program FAPC-TKSL/C)	43
8.5	Přesnost výpočtu amplitudy - $s = 1$ (program FAPC-TKSL/C)	44
8.6	Přesnost výpočtu amplitudy - $s = 0.5$ (program FAPC-TKSL/C)	44
8.7	Odečtení periody z průběhu odezvy systému na jednotkový impuls (program FAPC-TKSL/C)	45
8.8	Hlavní okno aplikace	46
9.1	Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program Maple)	50
9.2	Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program Maple)	50
9.3	Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program MATLAB)	51
9.4	Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program MATLAB)	51
9.5	Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program FAPC - TKSL/C)	52
9.6	Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program TKSL/C)	52
A.1	Výběr elektrického obvodu	55
A.2	Výběr barev grafů	56
A.3	Nápověda	56
A.4	Informace o bodech grafů a ovládání přehrávání grafů	57
B.1	Schéma RL sériového obvodu	58
B.2	Zobrazení výsledků v Gaussově rovině (u_L, u_R, i)	59
B.3	Graf amplitudové frekvenční charakteristiky RL sériového obvodu na cívce	60
B.4	Graf fázové frekvenční charakteristiky RL sériového obvodu na cívce	61
B.5	Graf amplitudové frekvenční charakteristiky RC sériového obvodu na cívce	61
B.6	Graf fázové frekvenční charakteristiky RC sériového obvodu na cívce	62
B.7	Graf amplitudové frekvenční charakteristiky RLC sériového obvodu na cívce	63
B.8	Graf fázové frekvenční charakteristiky RLC sériového obvodu na cívce	63
B.9	Fázový diagram - RLC sériový obvod	64
B.10	Fázový diagram - RLC paralelní obvod	65
B.11	Schéma RLC sériového obvodu	67
B.12	Schéma RLC obvodu	68
B.13	Amplitudová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program Maple)	69
B.14	Fázová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program Maple)	69
B.15	Amplitudová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program MATLAB)	70

B.16 Fázová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program MATLAB)	71
B.17 Amplitudová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program FAPC - TKSL/C)	71
B.18 Fázová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program FAPC - TKSL/C)	72
B.19 Schéma obvodu	72
B.20 Amplitudová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program Maple)	73
B.21 Fázová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program Maple)	74
B.22 Amplitudová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program MATLAB)	74
B.23 Fázová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program MATLAB) .	74
B.24 Amplitudová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program FAPC - TKSL/C)	75
B.25 Fázová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program FAPC - TKSL/C)	75

Kapitola 1

Úvod

Modelování a simulace je důležitou součástí informačních technologií. Je to užitečný nástroj pro zkoumání chování systému v různých režimech, či v závislosti na jeho topologii. Při modelování a simulaci elektrických obvodů můžeme jednoduše získávat informace o elektrických obvodech, ať už složitějších či jednoduchých, bez nutnosti jejich fyzického zapojování.

Cílem této bakalářské práce bylo seznámení se s klasickými metodami vyšetřování amplitudových a fázových frekvenčních charakteristik s použitím programu MATLAB¹ a Maple². Dále bylo úkolem porovnat tyto metody s metodami založenými na diferenciálních rovnicích. Pro výpočty diferenciálních rovnic existuje program TKSL³. V rámci této bakalářské práce bylo vytvořeno grafické uživatelské rozhraní pro novou verzi TKSL/C, jelikož TKSL/C umožňuje zadávání rovnic a parametrů pouze prostřednictvím příkazové řádky.

S problematikou vyšetřování frekvenčních charakteristik pomocí diferenciálních rovnic se pojí několik problémů. Především je to nalezení ustálené amplitudy. V elektrických obvodech totiž vzniká přechodový jev, který je vyvolán zapnutím zdroje napětí. Dalším problémem je také zvolení vhodného frekvenčního napětí a zpřesnění výsledku za pomoci stanovení adekvátního integračního kroku.

Výsledné uživatelské rozhraní poskytuje uživateli možnost přehledného zadávání a editace diferenciálních rovnic popisující elektrické obvody a grafický výstup v podobě grafů amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky.

Bakalářská práce sestává z deseti kapitol. Kapitola druhá vysvětluje pojmy spojené s frekvenční charakteristikou a také se věnuje lineárním elektrickým obvodům. Ve třetí kapitole se dozvíte základní informace o filtrech. Kapitola popisuje druhy filtrů a blíže se věnuje lineárním pasivním filtrům. Kapitola čtvrtá obsahuje základní informace o komplexních číslech včetně názorných příkladů. Kapitola pět je zaměřena na využití komplexních čísel při řešení amplitudové a fázové charakteristiky. Součástí této kapitoly jsou opět příklady popisující aplikaci symbolicko-komplexní metody. Kapitola šestá se věnuje teorii diferenciálních rovnic včetně analytického a numerického řešení. Obsahuje také numerické řešení nelineárních rovnic. Kapitola sedm vysvětluje, jak pomocí diferenciálních rovnic popsat elektrické obvody. Kapitola osmá se zabývá návrhem a implementací samotného grafického uživatelského rozhraní. Obsahuje algoritmy amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky a také řešení problémů přechodového jevu, volby frekvenčního rozsahu a přesnosti výpočtu. Kapitola devět poskytuje výsledky srovnání symbolicko-komplexní metody s využitím

¹Dostupné na: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>. Více také na [9].

²Dostupné na: <http://www.maplesoft.com>. Více také na [8].

³Dostupné na: <http://www.fit.vutbr.cz/~kunovsky/TKSL/download.html.cs>. Více také na [13]

programů MATLAB a Maple a metody založené na diferenciálních rovnicích s využitím programu TKSL/C s grafickým rozhraní vlastní aplikace FAPC. Kapitola deset je závěr, kde jsou shrnuty všechny důležité a nově nabyté poznatky a dosažené výsledky.

Kapitola 2

Frekvenční charakteristika

Frekvenční charakteristika znázorňuje závislost obvodových veličin a funkcí na frekvenci. Jedná se o odezvu systému na budící vstupní napětí U po odeznění přechodového jevu (podrobněji bude vysvětleno v kapitole 2.1). Jako frekvenci uvažujeme buď frekvenci f [Hz], nebo častěji úhlovou frekvenci ω [rad/s]. Frekvenční charakteristika je komplexní funkce frekvence, jejímž výsledkem je komplexní číslo:

$$F(j\omega) = F\omega e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.1)$$

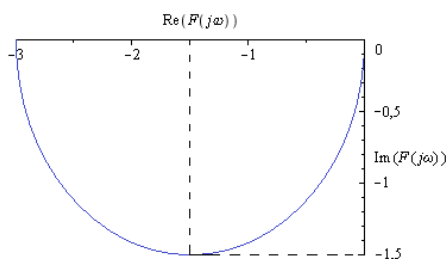
Frekvenční charakteristika v sobě zahrnuje jak amplitudovou, tak fázovou charakteristiku. Amplitudová frekvenční charakteristika:

$$F(\omega) = |F(j\omega)| \quad (2.2)$$

Fázová frekvenční charakteristika:

$$\varphi(\omega) = \arg[F(j\omega)] \quad (2.3)$$

Komplexní frekvenční charakteristiku graficky zobrazujeme v Gaussově rovině. Amplitudovou frekvenční a fázovou charakteristiku zobrazujeme obvykle každou zvlášť a to za použití logaritmických souřadnic pro názornější zobrazení. V této kapitole byla využita literatura [10, 2, 12].



Obrázek 2.1: Graf frekvenční charakteristiky v komplexní (Gaussově) rovině

2.1 Přechodný jev

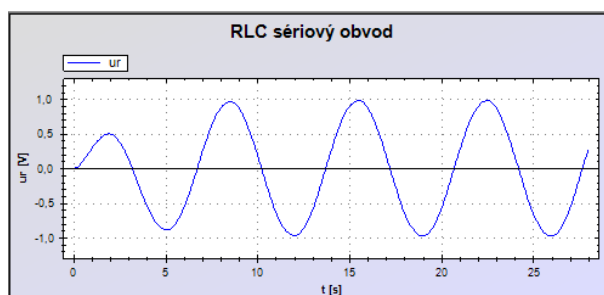
Přechodný jev je děj, při kterém přechází obvod z jednoho ustáleného stavu do jiného ustáleného stavu. Tento obvod musí být sestaven z alespoň jednoho akumulárního prvku,

což je ideální cívka, nebo ideální kondenzátor. Pokud tomu tak je, jedná se o přechodný jev prvního řádu. Pokud by obvod obsahoval pouze rezistory, změna proudu by způsobila okamžitou změnu napětí a k žádnému přechodnému jevu by nedocházelo. Žádný vodič však nemá jen odpor, ale má i indukčnost a kapacitu, což znamená, že ve všech elektrických obvodech vzniká přechodný jev. V některých případech je však tak rychlý, že ho můžeme zanedbat.

Pokud bychom se podívali na RL a RC obvod, tam je situace následující. Přechodný jev začne v okamžiku zapnutí napájecího zdroje stejnosměrného napětí a končí v okamžiku, když se kondenzátor nabije nebo cívku protéká ustálený proud. Naopak při vypnutí zdroje zůstává zbytek energie v elektrickém poli kondenzátoru nebo v magnetickém poli cívky, a tak přechodný jev bude ukončen až v tom případě, když se všechna zbytková elektrická energie spotřebuje na tepelnou energii v rezistoru.

Příčin přechodného jevu může být několik. Nejčastější příčinou je zapnutí či vypnutí napájecího zdroje, dále také zkrat, změna teploty, přerušení větve či osvětlení citlivého prvku.

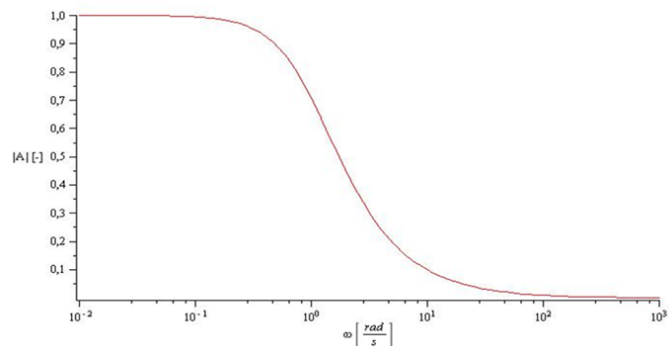
Nás bude přechodný jev zajímat především z hlediska toho, že amplitudu napětí či proudu nemůžeme odečístat ihned po zapnutí zdroje napětí, ale až po odeznění přechodného jevu. Na grafu 2.2 můžeme vidět jeden z případů přechodového děje. Než se amplituda napětí na odporu ustálí, nedosahuje výchylka maximální amplitudy. Amplitudu napětí tedy můžeme odečíst, až když skončí přechodný jev, tedy když amplituda napětí v kladném i záporném směru v dané periodě bude stejná.



Obrázek 2.2: Přechodový děj u RLC sériového obvodu

2.2 Amplitudová frekvenční charakteristika

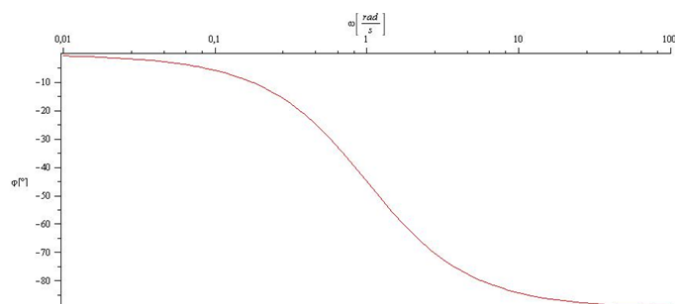
Amplitudová frekvenční charakteristika popisuje závislost poměru amplitudy výstupního k vstupnímu napětí v závislosti na frekvenci. Na grafu 2.3 vidíme ukázkou amplitudové frekvenční charakteristiky RC obvodu.



Obrázek 2.3: Graf amplitudové frekvenční charakteristiky

2.3 Fázová frekvenční charakteristika

Fázová frekvenční charakteristika popisuje fázový posun výstupního napětí oproti vstupnímu v závislosti na frekvenci. Fázová frekvenční charakteristika může vypadat u RC obvodu následovně.



Obrázek 2.4: Graf fázové frekvenční charakteristiky

2.4 Základní popis RLC obvodů

RLC obvody jsou elektrické obvody, které jsou připojeny ke zdroji střídavého napětí. Tyto obvody jsou tvořeny tzv. pasivními elektronickými součástkami. Pasivními elektronickými součástkami rozumíme takové součástky, které nejsou napájeny, tedy nepotřebují žádný zdroj energie ke své funkci. U RLC obvodu to jsou rezistor (s odporem R), cívka (s indukčností L) a kondenzátor (s kapacitancí C).

2.4.1 Rezistor

Rezistor je pasivní elektronická součástka, kterou obvykle nazýváme též odpor. Je charakterizován elektrickým odporem R . Jednotkou elektrického odporu je ohm (Ω). Pokud zařadíme tento prvek do obvodu, zvýší se tím velikost elektrického odporu v obvodu, a tím dojde k určitému úbytku napětí. Tento úbytek lze vypočítat následujícím vztahem, který

lze odvodit z Ohmova zákona:

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.4)$$

$$U_R = R \cdot I \quad (2.5)$$

2.4.2 Cívka

Cívka je pasivní elektronická součástka, kterou nazýváme také induktor. Je akumulační prvek. Cívku můžeme používat buď k vytváření magnetického pole, anebo také k indukci elektrického proudu. Cívka je charakterizována indukčností L . Jednotkou indukčnosti je henry (H). Pro výpočet napětí na cívce používáme následující vztah:

$$U_L = I \cdot j \cdot \omega \cdot L \quad (2.6)$$

2.4.3 Kondenzátor

Kondenzátor je pasivní elektronická součástka, pro jejíž pojmenování používáme také výraz kapacitor. Kondenzátor je akumulační prvek, který slouží k uchovávání elektrického náboje. Můžeme ho popsat za pomoci elektrické kapacity C . Jednotkou elektrické kapacity je farad (F). Mezi napětím a proudem kapacitou platí vztah:

$$U_C = \frac{I}{j \cdot \omega \cdot C} \quad (2.7)$$

Více se o elektrických obvodech můžete dočíst také v literatuře [\[11\]](#).

Kapitola 3

Filtry

Kmitočtové filtry jsou lineární elektrické obvody (dvojbrany) používané v mnoha oblastech elektroniky a elektrotechniky. Jejich hlavním úkolem je výběr (selekce) kmitočtových složek procházejícího signálu podle jejich kmitočtu. Filtry obvykle některé kmitočtové složky zpracovávaného signálu propouštějí bez nebo jen s malým útlumem (v případě aktivních filtrů je dokonce zesílí) v určitém pásmu kmitočtů, které nazýváme propustné pásmo. Mimo propustné pásmo jsou harmonické složky naopak silně utlumovány - tzv. nepropustné pásmo (pásmo potlačení, pásmo útlumu). Průchod signálu filtrem vede také obvykle k časovému zpoždění signálu, což je důsledkem fázových posuvů (zpoždění) procházejících harmonických kmitočtových složek signálů. Tyto vlivy můžeme znázornit fázovou kmitočtovou charakteristikou. Jejich vliv je také patrný při znázornění v časové oblasti [7]. Dále jsem v této kapitole využila literaturu [1, 2, 3, 12].

3.1 Typy filtrů

Rozdělení filtrů lze provést z různých hledisek, nejdůležitější dělení je však dle přenášeného kmitočtového spektra:

- dolní propust,
- horní propust,
- pásmová propust,
- pásmová zadrž,
- všepropustný (fázovací) dvojbran.

dle použitých prvků:

- pasivní filtry RC (resp. RLC),
- pasivní filtry LC,
- aktivní filtry RC,
 - se standardními operačními zesilovači,
 - se zvláštními typy OZ,
 - s ideálními zesilovači napětí,

- filtry RC s funkčními bloky,
 - s impedančními invertory a gyrátory,
 - s impedančními konvertory,
 - s proudovými konvejory,
- aktivní filtry R,
- filtry se syntetickými prvky,
- filtry se spínanými kapacitami,
- filtry s povrchovou vlnou,
- filtry s piezoelektrickými rezonátory
- a další. [5]

Nás však budou zajímat především pasivní filtry.

3.2 Lineární pasivní filtry

Nejdříve je potřeba vysvětlit, co to znamená pojem lineární a pasivní. Výraz pasivní jsme si již vysvětlili v kapitole 2.4. Za pasivní filtry považujeme takové obvody, které obsahují pouze pasivní součástky. Pasivními součástkami chápeme takové součástky, které pro svou funkci nevyžadují zdroj napájení. Lineární filtr je sestaven z lineárních součástek, to znamená takových součástek, jejichž závislost mezi napětím a proudem lze popsat lineární rovnicí:

$$U = Z \cdot I. \quad (3.1)$$

K vytvoření pasivních lineárních filtrů se nejčastěji používá pasivních elektronických součástek, jako je rezistor (R), cívka (L) a kondenzátor (C). Jejich složením vznikají obvody typu RC, RL nebo RLC, které vykazují charakteristiku hornopropustního, dolnopropustního filtru, pásmové propusti nebo zádrže, a ty si představíme později. Tyto filtry se vyznačují amplitudovou frekvenční a fázovou charakteristikou.

Pasivní filtry jsou levné a jednoduché řešení filtrace. Jelikož obsahují pasivní součástky, nemusí být napájeny zdrojem napětí. Pasivní filtry mají však i svá negativa. Vytvoření kaskádní syntézy filtrů vyšších řádů je velmi obtížné. RC a RL filtry mají také nízkou hodnotu činitele jakosti, což znamená, že póly leží na reálné ose a dochází tak k přetlumení obvodů.

Činitel jakosti udává kvalitu obvodu. Jedná se o bezrozměrnou veličinu. V sériovém RLC obvodu (viz obr. 3.9) jsou při rezonanci na cívce i kondenzátoru stejné velikosti napětí a platí:

$$U_{L_0} = U_{C_0} = \omega_0 L I_0, \quad (3.2)$$

kde U_{L_0} a U_{C_0} představují amplitudy napětí na cívce a kondenzátoru.

Při rezonanci bude proud následující:

$$I_0 = \frac{U}{R}, \quad (3.3)$$

a proto platí také vztah:

$$U_{L_0} = U_{C_0} = \omega_0 L \frac{U}{R} = QU, \quad (3.4)$$

z něhož můžeme vyjádřit činitel jakosti:

$$Q = \frac{\omega L}{R} [-]. \quad (3.5)$$

Napětí na ideální cívce a kondenzátoru bude, jak je vidět ze vztahu (3.4), následující:

$$U_{L_0} = U_{C_0} = QU, \quad (3.6)$$

z čehož vyplývá, že při rezonanci bude napětí na ideální cívce a kondenzátoru Q -krát větší než konstantní svorkové napětí U obvodu.

U paralelního obvodu je to obdobné. Pro proud protékající jednotlivými větvemi při rezonanci platí vztah:

$$\frac{I_{C_0}}{I_0} = \frac{U\omega_0 C}{\frac{U}{Z_0}} = \omega_0 C Z_0. \quad (3.7)$$

kde I_{C_0} a I_0 představují amplitudy proudů.

Po dosazení:

$$Z_0 = \frac{L}{RC} \quad (3.8)$$

dostaneme vztah:

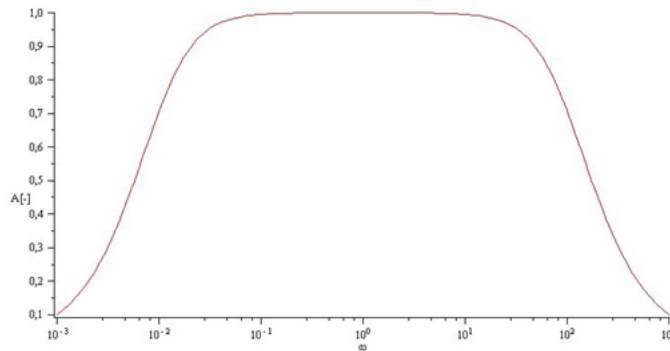
$$\frac{I_{C_0}}{I_0} = \omega_0 C \frac{L}{RC} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q. \quad (3.9)$$

Platí tedy:

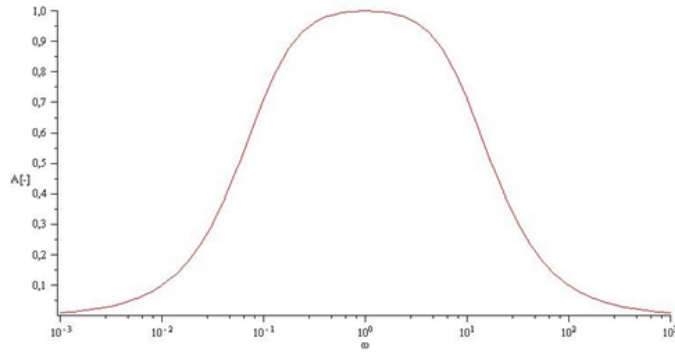
$$I_{C_0} = I_{RL_0} = QI_0. \quad (3.10)$$

Obdobně jako napětí u sériového RLC obvodu je u paralelního obvodu proud protékající cívkou a kondenzátorem I_{RL_0} a I_C Q -krát větší než proud odebíraný ze zdroje napětí.

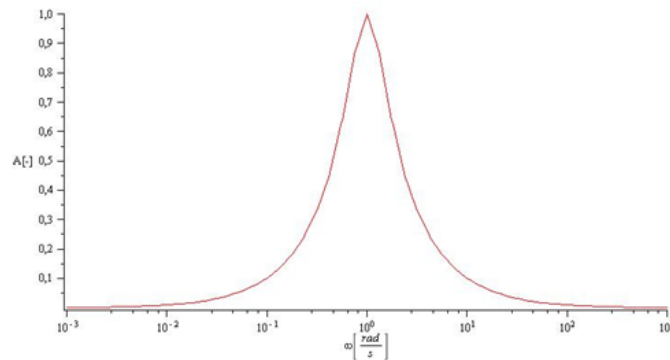
Rovnice (3.5) nám popisuje tvar frekvenční amplitudové křivky. Platí, že čím menší bude odpor na rezistoru, tím užší bude křivka, tak jak ukazují následující obrázky:



Obrázek 3.1: Frekvenční amplitudová charakteristika RLC sériového obvodu: $R = 100[\Omega]$



Obrázek 3.2: Frekvenční amplitudová charakteristika RLC sériového obvodu: $R = 10[\Omega]$



Obrázek 3.3: Frekvenční amplitudová charakteristika RLC sériového obvodu: $R = 1[\Omega]$

3.3 Napěťový přenos

Jak jsme si uvedli již dříve, filtry složené z pasivních součástek nepotřebují ke své funkci žádný zdroj napětí. Ve skutečnosti je tomu však tak, že na vstupu je připojen zdroj střídavého napětí o vnitřním odporu R_i a na výstupu zatěžovací impedance Z . Vstupní napětí U_{in} se tedy ve filtru transformuje na výstupní napětí U_{out} . Tyto dvě napětí se liší velikostí a vzájemným fázovým posunem. Jejich poměr nazýváme napěťový přenos A , který je definován vztahem:

$$A = \frac{U_{out}}{U_{in}} [-]. \quad (3.11)$$

Napěťový přenos A je bezrozměrná veličina. Pro lepší grafickou představu o průběhu napěťového přenosu, se přenos často vyjadřuje v decibelech:

$$A_{db} = 20 \log \left(\frac{U_{out}}{U_{in}} \right) [db]. \quad (3.12)$$

Existuje tady však hranice mezi propustným pásmem filtru a nepropustným, a ta je dána frekvencí, které se říká frekvence zlomu. Jedná se o kmitočet, při kterém dochází k poklesu

maximální hodnoty přenosu o 3 dB. Při frekvenci zlomu u RC obvodu platí:

$$R = |X_C| = \frac{1}{\omega C}, \quad (3.13)$$

a z této rovnice si pak můžeme odvodit frekvenci zlomu (mezní frekvenci) ω_m :

$$\omega_m = \frac{1}{RC} [\text{rad/s}]. \quad (3.14)$$

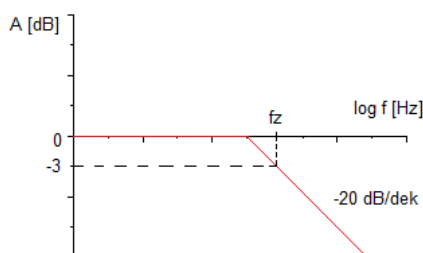
Tímto způsobem můžeme vypočítat rezonanční frekvenci. Obdobně tomu bude u RL sériového obvodu.

$$R = |X_L| = \omega L \quad (3.15)$$

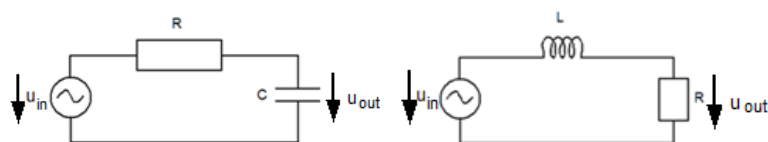
$$\omega_m = \frac{R}{L} [\text{rad/s}] \quad (3.16)$$

3.3.1 Dolní propust

Nejjednodušším příkladem zapojení dolnoproputných filtrů je integrační článek (viz obr. refdolniproputi). Pokud bychom se podívali na jeho frekvenční charakteristiku, tak zjistíme, že při zvýšení frekvence vstupního napětí se hodnota výstupního napětí snižuje. Desetinásobný pokles frekvence způsobí desetinásobný pokles výstupního napětí. Při frekvenci nižší než je mezní frekvence, splývá charakteristika s osou frekvence. Při frekvenci $f = f_z$ bude mít křivka odklon -3dB, při dalším zvyšování frekvence se přenos napětí snižuje s poklesem o -20dB/dek (viz graf refgrafpropust).



Obrázek 3.4: Frekvenční charakteristika - dolní propust

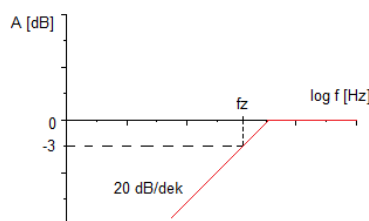


Obrázek 3.5: Dolní propust: vlevo - RC obvod; vpravo - LR obvod

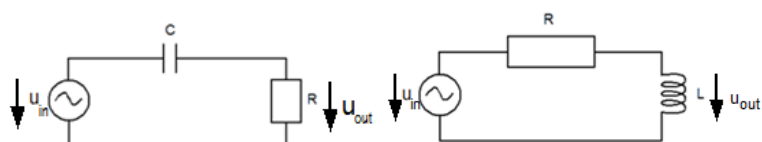
3.3.2 Horní propust

Za hornoproputný filtr považujeme derivační článek (viz obr. 3.7). Z jeho frekvenční charakteristiky lze vyčíst, že pokud se zvýší frekvence vstupního napětí, zvýší se i napětí na

výstupu. Pro frekvence nižší než je mezní frekvence f_z , má charakteristika sklon 20dB/dek. Při frekvenci $f = f_z$ sklon poklesne na 3dB a vyšších frekvencích charakteristika splyne s osou frekvence (viz graf 3.6).



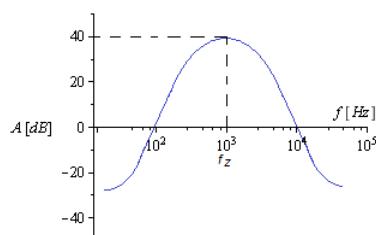
Obrázek 3.6: Frekvenční charakteristika - horní propust



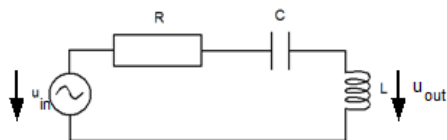
Obrázek 3.7: Horní propust: vlevo - CR obvod; vpravo - RL obvod

3.3.3 Pásmová propust

Nejčastější pásmovou propustí je tzv. Wienův článek, který sestává z RC členů. My si však ukážeme jednodušší příklad pásmové propusti, a to RLC sériový obvod (viz obr. 3.9). Frekvenční charakteristika tohoto obvodu bude mít svou amplitudu při frekvenci $f = f_z$. Při nižších či vyšších frekvencích bude obvod vykazovat selektivní vlastnost, což znamená, že bude propouštět pouze jednu frekvenci (viz graf na obrázku 3.8).



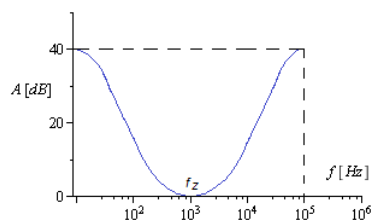
Obrázek 3.8: Frekvenční charakteristika - pásmová propust



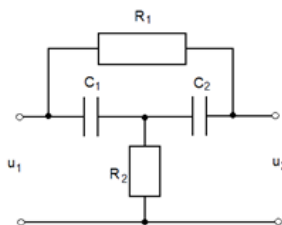
Obrázek 3.9: RLC sériový obvod - pásmová propust

3.3.4 Pásmová zádrž

Příklad filtru s charakteristikou pásmové zádrže je uveden na obrázku 3.11. Pokud bychom se podívali na frekvenční charakteristiku tohoto obvodu, napěťový přenos bude nejmenší při kritické frekvenci $f = f_z$. Signál prochází dvěma fázově rozdílnými cestami, což způsobí, že při kritické frekvenci se zruší, a tak dojde k minimálnímu nebo až nulovému přenosu. Takovýmto typům článků říkáme články s nulovým přenosem (viz graf 3.10).



Obrázek 3.10: Frekvenční charakteristika - pásmová zádrž



Obrázek 3.11: Schéma obvodu - pásmová zádrž

Kapitola 4

Komplexní čísla

Komplexní čísla představují uspořádané dvojice reálných čísel. Díky nim má každá algebraická rovnice řešení. Množinu komplexních čísel tedy definujeme následovně:

$$C = \{z = (a, b); a, b \in \mathbb{R}\} \quad (4.1)$$

Pro lepší práci s komplexními čísly zavádíme algebraický tvar komplexního čísla $z = (a, b)$:

$$z = a + bj \quad (4.2)$$

kde j představuje imaginární jednotku. V literatuře se běžně setkáme s označením imaginární jednotky i . Pro popis elektrických obvodů je však vhodné používat j , aby se imaginární jednotka nepletla s označením proudu. Pro imaginární jednotku platí rovnice (4.7).

Číslo a říkáme reálná část a představuje první souřadnici komplexního čísla, a číslo b se nazývá imaginární část a určuje druhou souřadnici komplexního čísla. Čísla a a b patří do oboru reálných čísel.

Reálnou část čísla z značíme $Re(z)$ a imaginární část čísla z značíme $Im(z)$. Ryze reálná čísla ztotožňujeme s komplexními čísly, které mají imaginární část nulovou, např. $8 + 0j$. Naproti tomu čísla s nulovou reálnou částí, např. $0 + 8j$, nazýváme ryze imaginární. Dále se o komplexních číslech dočtete v [14].

4.1 Matematické operace s komplexními čísly

Stejně jako s čísly ostatních číselných oborů i čísla komplexní můžeme navzájem sčítat, odčítat, násobit a dělit. Nyní si proto ukážeme, jakým způsobem to můžeme provádět.

Sčítání i odčítání dvou komplexních čísel provádíme následovně. Nejprve sečteme reálné části čísel a následovně imaginární části čísel, nakonec obě části sečteme dohromady.

$$z_1 + z_2 = (a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j \quad (4.3)$$

$$z_1 - z_2 = (a + bj) - (c + dj) = (a - c) + (b - d)j \quad (4.4)$$

Součin dvou komplexních čísel je o něco složitější. Musíme nejprve roznásobit obě závorky a následně členy podle pravidel (4.3) a (4.4) sečteme (odečteme), až dostaneme konečný tvar výsledného čísla.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bj) \cdot (c + dj) = ac + cbj + adj + bdj^2 = (ac - bd) + (ad + bc)j \quad (4.5)$$

Pokud místo z_1 a z_2 dosadíme imaginární jednotku j , dostaneme následující výsledek. Rovnici (4.7) je velmi dobré si zapamatovat, protože ji při práci s komplexními čísly budeme často využívat.

$$j^2 = (0 + j) \cdot (0 + j) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)j = -1 \quad (4.6)$$

$$j^2 = -1 \quad (4.7)$$

Než si vysvětlíme, jak se provádí dělení dvou komplexních čísel, nadefinujeme si pojmy, které při jeho vysvětlování budeme používat:

Nechť $z = a + bj$, je komplexní číslo. Pak

$-z = -a - bj$, nazýváme opačným číslem k číslu z ,

$\bar{z} = a - bj$, nazýváme komplexně sdruženým číslem k číslu z ,

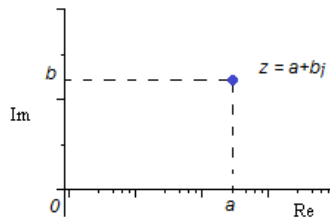
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, nazýváme absolutní hodnotou komplexního čísla z .

Nyní se podíváme na to, jak můžeme vydělit dvě komplexní čísla. Nejdříve zlomek rozšíříme, a to tak, že čitatele i jmenovatele vynásobíme s komplexně sdruženým číslem k jmenovateli. V čitateli závorky roznásobíme a sečteme imaginární a komplexní čísla. Ve jmenovateli nám zůstane pouze reálné číslo, čímž jsme dělení převedli na násobení převrácenou hodnotou reálného čísla:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bj}{c + dj} \cdot \frac{c - dj}{c - dj} = \frac{(ac + bd) + (cb - ad)j}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{cb - ad}{c^2 + d^2} \quad (4.8)$$

4.2 Grafické znázornění komplexní čísel

Jak jsme se již uvedli v kapitole 4, v zápise $z = a + bj$ nám reálná část čísla a udává první souřadnici komplexního čísla a imaginární část čísla b nám udává druhou souřadnici komplexního čísla. Rovinu, do které komplexní čísla vykreslujeme, nazýváme Gaussovou rovinou. Její počátek udávají souřadnice $0 + 0j$. Gaussova rovina sestává z dvou navzájem kolmých os. Horizontální osa je reálná (Re) a na ni kolmá osa vertikální je imaginární (Im). Nyní do grafu nanese komplexní číslo z s jeho souřadnicemi (a, b) (viz obr. 4.1).



Obrázek 4.1: Znázornění komplexního čísla z v Gaussově rovině

Pro lepší pochopení si uvedeme příklad, v němž pro výpočet použijeme komplexní čísla (viz Příloha B.1).

4.3 Výhody a nevýhody výpočtu s komplexními čísly

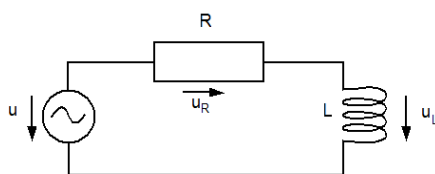
Symbolicko-komplexní metoda je vhodná pouze pro jednoduché a středně složité obvody. Výpočet je možný provádět běžnými matematickými prostředky. Na druhou stranu nelze použít metodu pro výpočet obvodů s nelineárními prvky. Při výpočtu rezonančních frekvencí složitějších obvodů dostáváme rovnice vyššího řádu.

Kapitola 5

Symbolicko-komplexní metoda řešení frekvenční charakteristiky

5.1 RL sériový obvod

Nejprve si předvedeme, jak vypadá amplitudová frekvenční charakteristika RL obvodu. RL obvod se skládá ze zdroje střídavého napětí a odporu s cívkou zapojených v sérii (viz obr. 5.1).



Obrázek 5.1: Schéma RL sériového obvodu

Obvodem protéká proud i_t . Napětí na jednotlivých elektronických součástkách je různé. Můžeme ho popsat následujícím vztahem:

$$u = u_R + u_L. \quad (5.1)$$

5.1.1 Amplitudová frekvenční charakteristika

Nyní si odvodíme rovnici pro výpočet amplitudové frekvenční charakteristiky. Nejprve je zapotřebí vypočítat napěťový přenos A , který jsme si dříve definovali (3.11). Napěťový přenos nám udává poměr výstupního napětí k vstupnímu. V tomto případě je to amplituda napětí na cívce k amplitudě napětí na zdroji.

$$A = \frac{U_L}{U} \quad (5.2)$$

Napětí na cívce si vypočteme následujícím způsobem:

$$U_L = I \cdot j \cdot \omega \cdot L, \quad (5.3)$$

$$U_L = \frac{U}{Z} \cdot j \cdot \omega \cdot L, \quad (5.4)$$

$$U_L = \frac{U}{R + j \cdot \omega \cdot L} \cdot j \cdot \omega \cdot L. \quad (5.5)$$

Rovnici (5.5) doplníme do rovnice (5.2) pro výpočet napěťového přenosu a získáme tak následující rovnici:

$$A = \frac{\frac{U \cdot j \cdot \omega \cdot L}{R + j \cdot \omega \cdot L}}{U}, \quad (5.6)$$

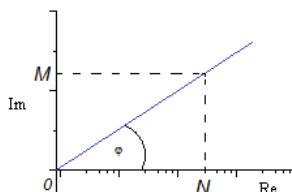
$$A = \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R + j \cdot \omega \cdot L} [-]. \quad (5.7)$$

5.1.2 Fázová frekvenční charakteristika

Fázová frekvenční charakteristika vyjadřuje fázový posuv signálu výstupního oproti vstupnímu. Tedy v našem případě, jaký je fázový posuv napětí na cívce oproti zdroji napětí. Ten vypočítáme tak, že si vyjádříme napětí na cívce jako komplexní číslo v algebraickém tvaru:

$$N + j \cdot M. \quad (5.8)$$

A následně si vypočítáme fázový posuv φ podle následující rovnice (5.10), který vyplývá z následujícího obrázku:



Obrázek 5.2: Graf výpočtu fázového posunu

$$\tan(\varphi) = \frac{M}{N} \quad (5.9)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{M}{N}\right) [rad] \quad (5.10)$$

Nyní tuto teorii aplikujeme na RL obvod a k tomu využijeme již dříve zmíněný vzorec pro napěťový přenos (5.7). Nejdříve provedeme substituci na tvar (5.8), následně za pomoci rovnice (5.10) vypočteme fázový posuv φ a dosadíme konkrétní hodnoty.

$$A = \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R + j \cdot \omega \cdot L}, \quad (5.11)$$

$$A = \frac{j \cdot D}{R + j \cdot D} \cdot \frac{R - j \cdot D}{R - j \cdot D} \quad (5.12)$$

kde

$$D = \omega \cdot L. \quad (5.13)$$

$$A = \frac{j \cdot D \cdot (R - j \cdot D)}{R^2 + D^2} \quad (5.14)$$

$$A = \frac{j \cdot D \cdot R + D^2}{R^2 + D^2} \quad (5.15)$$

$$A = \frac{D^2}{R^2 + D^2} + j \frac{D \cdot R}{R^2 + D^2} \quad (5.16)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\frac{D \cdot R}{R^2 + D^2}}{\frac{D^2}{R^2 + D^2}} \right) \quad (5.17)$$

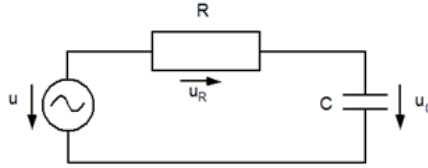
$$\varphi = \arctan \left(\frac{R}{D} \right) \quad (5.18)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{R}{\omega \cdot L} \right) [rad] \quad (5.19)$$

V příloze najdete příklad výpočtu RL sériového obvodu (viz [B.2](#)).

5.2 RC sériový obvod

Nyní se podíváme na to, jak bude amplitudová frekvenční charakteristika vypadat u RC obvodu. RC obvod je tvořený zdrojem střídavého napětí a odporem s kondenzátorem zapojených v sérii (viz obr. [5.3](#)).



Obrázek 5.3: Schéma RC sériového obvodu

Všemi částmi obvodu protéká stejný proud i_t , ale napětí na jednotlivých elektronických součástkách je různý. Můžeme ho popsat následujícím vztahem:

$$u = u_R + u_C. \quad (5.20)$$

5.2.1 Amplitudová frekvenční charakteristika

Nyní si odvodíme rovnici pro výpočet amplitudové frekvenční charakteristiky. Nejprve je zapotřebí vypočítat napěťový přenos A , který jsme si dříve definovali ([3.11](#)). V tomto případě je to amplituda napětí na kondenzátoru k amplitudě napětí na zdroji.

$$A = \frac{U_C}{U} \quad (5.21)$$

Napětí na kondenzátoru si vypočteme následujícím způsobem:

$$U_C = \frac{I}{j \cdot \omega \cdot C}, \quad (5.22)$$

$$U_C = \frac{\frac{U}{Z}}{j \cdot \omega \cdot C}, \quad (5.23)$$

$$U_C = \frac{\frac{U}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}}{j \cdot \omega \cdot C}. \quad (5.24)$$

Rovnici (5.24) doplníme ho do rovnice (5.21) pro výpočet napětového přenosu a obdržíme následující rovnici:

$$A = \frac{\frac{\frac{U}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}}{j \cdot \omega \cdot C}}{U}, \quad (5.25)$$

$$A = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} [-]. \quad (5.26)$$

5.2.2 Fázová frekvenční charakteristika

Nyní přejdeme k fázové frekvenční charakteristice tohoto obvodu a k tomu využijeme již dříve zmíněný vzorec pro napětový přenos (5.26).

$$A = \frac{-j \frac{1}{\omega \cdot C}}{R - j \frac{1}{\omega \cdot C}} \quad (5.27)$$

$$A = \frac{j \cdot D}{R + j \cdot D} \cdot \frac{R - j \cdot D}{R - j \cdot D}, \quad (5.28)$$

kde

$$D = \frac{1}{\omega \cdot C}. \quad (5.29)$$

$$A = \frac{j \cdot D \cdot (R - j \cdot D)}{R^2 + D^2} \quad (5.30)$$

$$A = \frac{j \cdot D \cdot R + D^2}{R^2 + D^2} \quad (5.31)$$

$$A = \frac{D^2}{R^2 + D^2} + j \frac{D \cdot R}{R^2 + D^2} \quad (5.32)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\frac{D \cdot R}{R^2 + D^2}}{\frac{D^2}{R^2 + D^2}} \right) \quad (5.33)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{R}{D} \right) \quad (5.34)$$

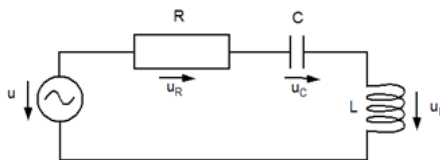
$$\varphi = \arctan \left(\frac{R}{-\frac{1}{\omega \cdot C}} \right) \quad (5.35)$$

$$\varphi = \arctan (-R \cdot \omega \cdot C) [rad] \quad (5.36)$$

V příloze najdete příklad výpočtu RC sériového obvodu (viz B.3).

5.3 RLC sériový obvod

Jako poslední příklad si uvedeme RLC obvod. RLC obvod se sestává ze tří elektronických pasivních prvků – odporu R , cívce L a kondenzátoru C , které jsou zapojeny sériově za sebou a připojeny ke zdroji střídavého napětí:



Obrázek 5.4: Schéma RLC sériového obvodu

Jelikož se jedná o sériové zapojení, proud je ve všech částech obvodu stejný a různé je pouze napětí na jednotlivých součástkách. Toto napětí můžeme popsat následujícím vztahem:

$$u = u_R + u_L + u_C. \quad (5.37)$$

5.3.1 Amplitudová frekvenční charakteristika

Nyní si odvodíme rovnici pro výpočet amplitudové frekvenční charakteristiky. Nejprve je zapotřebí vypočítat napěťový přenos A , který jsme si dříve definovali (3.11). V tomto případě je to amplituda napětí na rezistoru k amplitudě napětí na zdroji.

$$A = \frac{U_R}{U} \quad (5.38)$$

Napětí na rezistoru si vypočteme následujícím způsobem:

$$U_R = I \cdot R, \quad (5.39)$$

$$U_R = \frac{U}{Z} \cdot R, \quad (5.40)$$

$$U_R = \frac{U \cdot R}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \quad (5.41)$$

Rovnici (5.41) doplníme do rovnice (5.38) pro výpočet napěťového přenosu a obdržíme tak tuto rovnici:

$$A = \frac{\frac{U \cdot R}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}}{U} \quad (5.42)$$

$$A = \frac{R}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} [-] \quad (5.43)$$

5.3.2 Fázová frekvenční charakteristika

Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu si vypočteme následujícím způsobem. Využijeme již dříve zmíněný vzorec pro napěťový přenos (5.43).

$$A = \frac{R}{R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)} \quad (5.44)$$

$$A = \frac{R}{R + j \cdot D} \cdot \frac{R - j \cdot D}{R - j \cdot D}, \quad (5.45)$$

kde

$$D = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (5.46)$$

$$A = \frac{R \cdot (R - j \cdot D)}{R^2 + D^2} \quad (5.47)$$

$$A = \frac{R^2 - j \cdot R \cdot D}{R^2 + D^2} \quad (5.48)$$

$$A = \frac{R^2}{R^2 + D^2} - j \frac{R \cdot D}{R^2 + D^2} \quad (5.49)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{-\frac{R \cdot D}{R^2 + D^2}}{\frac{R^2}{R^2 + D^2}} \right) \quad (5.50)$$

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{D}{R} \right) \quad (5.51)$$

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \right) [rad] \quad (5.52)$$

V příloze najdete příklad výpočtu RLC sériového obvodu (viz [B.4](#)).

5.4 Grafické řešení

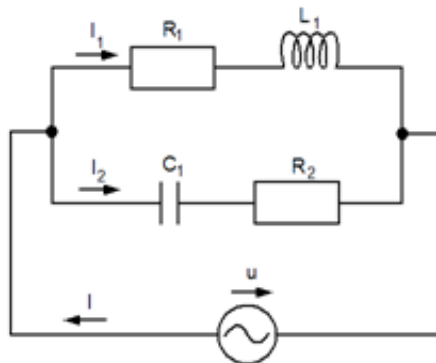
Nejčastější způsob, jak zjistit fázový posun výstupního signálu oproti vstupnímu je za pomoci tzv. fázových diagramů. Nejlépe si to vysvětlíme přímo na příkladu.

Příklad 1. Je dán sérioparalelní obvod (viz obr. 5.5). Zakreslete pomocí fázového diagramu, jak bude vypadat výsledný proud protékající obvodem.

Tento obvod bude ve výpočtu o něco složitější. Nevystačíme si pouze s vektorovým součinem, ale použijeme také Thaletovu kružnici. Thaletova věta nám říká:

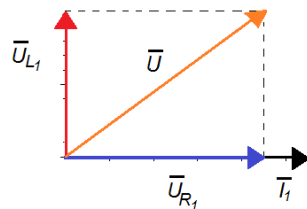
Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé.

Thaletova kružnice je kružnice, která je součástí konstrukce Thaletovy věty.



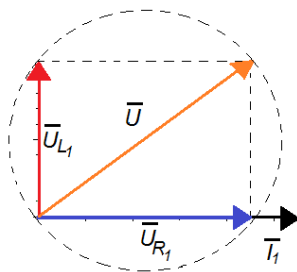
Obrázek 5.5: Schéma sérioparalelního obvodu

Jak vidíme na obrázku 5.5 obvod se sestává ze sériového zapojení odporu R_1 a cívky L_1 , které jsou spojeny paralelně k odporu R_2 a cívce C_1 . Napětí na proudu R_1 bude ve fázi s proudem I_1 . Napětí na cívce bude proud o 90° předbíhat (viz obr. 5.6). Nyní si uděláme vektorových součin těchto dvou vektorů.



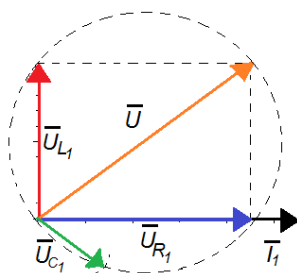
Obrázek 5.6: Fázový diagram - vektorový součin U_{R_1} a U_{L_1}

Nad vektorem U sestrojíme Thaletovu kružnici. Jak můžeme z obrázku 5.7 vidět, konce vektorů U_{L_1} a U_{R_1} budou ležet na této kružnici.



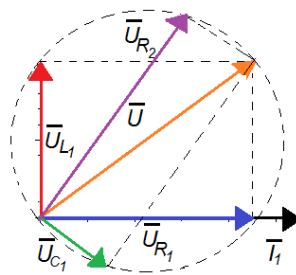
Obrázek 5.7: Fázový diagram - Thaletova kružnice

Do fázového grafu teď můžeme lehce dokreslit vektor U_{C_1} , když víme, jakou má velikost, že jeho konec musí ležet na Thaletově kružnici a že je oproti vektoru proudu I_1 opožděn.



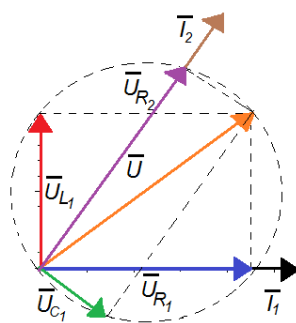
Obrázek 5.8: Fázový diagram - vektor U_{C_1}

Z Thaletovy věty využijeme vlastnost, že všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé. Pokud spojíme konec vektorů U_{C_1} a U dostaneme pravý úhel a odpovídající strana vzniklého pomyslného obdélníku nám tvoří chybějící vektor U_{R_2} .



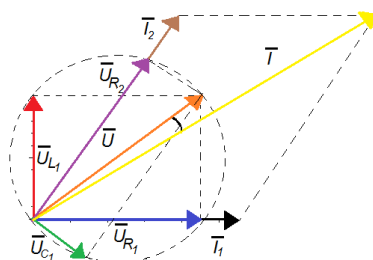
Obrázek 5.9: Fázový diagram - vektor U_{R2}

Dále zakreslíme do fázového diagramu proud I_2 , který má stejný směr jako vektor U_{R2} , jak vyplývá z obrázku 5.5.



Obrázek 5.10: Fázový diagram - vektor I_2

Nakonec je potřeba do fázového diagramu zakreslit proud I , který vznikne jako vektorový součet proudů I_1 a I_2 .



Obrázek 5.11: Fázový diagram - vektor I

Další příklady nalezneme v příloze (viz B.5 a B.6).

Kapitola 6

Diferenciální rovnice

Za diferenciální rovnici považuje takovou rovnici, která obsahuje derivaci nebo diferenciály jedné závislé funkce (nebo více závislých funkcí). Obyčejná diferenciální rovnice obsahuje pouze jednu nezávislou proměnnou. Diferenciální rovnici s více nezávislými proměnnými nazýváme parciální rovnici. Příkladem obyčejné diferenciální rovnice může být tato rovnice:

$$y' = x^2 + 14x. \quad (6.1)$$

Každá diferenciální rovnice je definována řádem, což je řád nejvyšší derivace v dané diferenciální rovnici. U této diferenciální rovnice je řád roven 3:

$$2x''' + 10x'' + 7 = 20e^2. \quad (6.2)$$

Diferenciální rovnice klasifikujeme podle toho, zda jsou lineární nebo nelineární. Lineární diferenciální rovnici můžeme zapsat ve tvaru:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \quad (6.3)$$

kde $y = y(x)$ je neznámá závislá funkce, $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, n představuje řád diferenciální rovnice, x nezávislou proměnnou a $g(x)$ jsou dané funkce, definované na intervalu I .

Abychom mohli o diferenciální rovnici prohlásit, že je lineární, musí splňovat dvě vlastnosti:

- rovnice musí obsahovat závislou proměnnou y a všechny její derivace pouze v prvních mocninách,
- každý koeficient závisí pouze na nezávislé proměnné.

Pokud diferenciální rovnice nesplňuje uvedené podmínky, jedná se o nelineární diferenciální rovnici. Při zpracování této kapitoly byla použita tato literatura [4].

6.1 Řešení diferenciálních rovnic

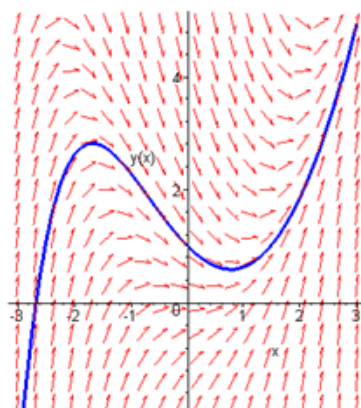
Pokud bychom analyzovali diferenciální rovnici $y' = y$, zjistili bychom, že má přinejmenším jedno řešení, a to funkci $y = e^x$. Nejedná se však o jediné řešení rovnice. Rovnici vyhovuje celá množina funkcí:

$$y = e^x + K, \quad (6.4)$$

kde K a je integrační konstanta.

U diferenciálních rovnic proto rozlišujeme:

- obecné řešení diferenciální rovnice - řešení diferenciální rovnice, které obsahuje n parametrů,
- partikulární řešení diferenciální rovnice - řešení diferenciální rovnice, které neobsahuje žádné libovolné parametry,
- singulární řešení diferenciální rovnice - řešení diferenciální rovnice, které nelze získat z parametrické množiny řešení.



Obrázek 6.1: Obecné (červené šipky) a partikulární (modrá čára) řešení diferenciální rovnice

6.2 Analytické řešení diferenciálních rovnic

Analytický způsob řešení diferenciálních rovnic používáme pouze u jednoduchých diferenciálních rovnic. Pokud diferenciální rovnici řešíme analyticky, dostaneme výsledek v přesném tvaru. Celou řadu diferenciálních rovnic je však velmi obtížné řešit analyticky, nebo nejsou analytickým postupem vůbec řešitelná.

Příklad 2. *Nalezněte analytické řešení následující diferenciální rovnice:*

$$y' = y$$

Počáteční podmínka:

$$y(0) = 1$$

$$y' - y = 0$$

Charakteristická rovnice:

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

Očekávané řešení:

$$y(t) = c(t)e^{\lambda t}$$

$$y(t) = c(t)e^t$$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= c'(t)e^t + c(t)e^t \\
c'(t)e^t + c(t)e^t - c(t)e^t &= 0 \\
c'(t) &= 0 \\
c'(t) &= konst = K
\end{aligned}$$

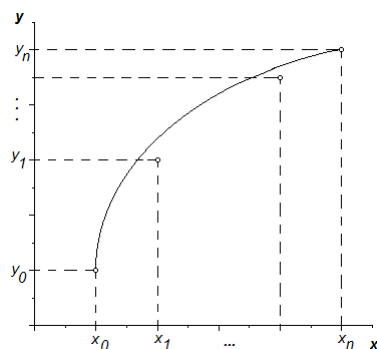
Obecné řešení:

$$\begin{aligned}
y(t) &= Ke^t \\
y(0) &= 1 \\
1 &= Ke^0 \\
K &= 1 \\
y &= 1e^t \\
y &= e^t
\end{aligned}$$

Další příklad naleznete v příloze (viz [B.7](#)).

6.3 Numerické řešení diferenciálních rovnic

V případě, že analytický způsob je příliš složitý, či nereálný, používáme numerické řešení diferenciálních rovnic, které spočívá v hledání přibližného řešení. Na grafu [6.2](#) vidíme, jak se liší přesné a přibližné řešení diferenciální rovnice:



Obrázek 6.2: Přesné a přibližné řešení diferenciální rovnice

Diferenciální rovnici prvního řádu můžeme v implicitním tvaru zapsat následujícím způsobem:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (6.5)$$

Nyní si definujeme počáteční úlohu pro tuto diferenciální rovnici, procházející předepsaným bodem (x_0, y_0) .

$$y' = f(x, y) \quad (6.6)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (6.7)$$

Rovnice (6.7) se nazývá počáteční podmínka.

Společným znakem všech dále uvedených metod je, že řešení nehledáme jako spojitou funkci, definovanou na celém zkoumaném intervalu $\langle a, b \rangle$, ale hodnoty přibližného řešení

počítá, pouze v konečném počtu bodů $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Těmto bodům říkáme uzlové body nebo uzly sítě a množině x_0, x_1, \dots, x_n říkáme síť. Rozdíl $h_i = x_{i+1} - x_i$ se nazývá krok sítě v uzlu x_i [6].

Všechny numerické metody jsou odvozené ze stejného algoritmu, který je odvozen z Taylorova rozvoje dané funkce v bodě ve tvaru:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot \frac{y'(x)}{1!} + h^2 \cdot \frac{y''(x)}{2!} + h^3 \cdot \frac{y'''(x)}{3!} + \dots \quad (6.8)$$

6.3.1 Eulerovy metody

Eulerovu metodu řadíme mezi jednokrokové metody, což znamená, že pro výpočet dalšího kroku využívá pouze informaci o jednom předchozím kroku. Jedná se o nejjednodušší metodu, která se pro výpočet diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami používá.

Mějme danu počáteční úlohu (6.6) a (6.7) a pravidelnou síť x_0, x_1, \dots, x_n s krokem h . Ve všech bodech sítě by podle rovnic (6.6) a (6.7) mělo platit:

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)). \quad (6.9)$$

Derivaci na levé straně této rovnice můžeme nahradit diferencí podle jednoho ze vzorců:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_0), \quad (6.10)$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi_1). \quad (6.11)$$

Dostaneme:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \doteq f(x_i, y(x_i)). \quad (6.12)$$

Nahradíme-li $y(x_i)$ přibližnou hodnotou y_i , můžeme odtud vyjádřit přibližnou hodnotu $y(x_{i+1})$ jako:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (6.13)$$

Pomocí tohoto vzorce vypočteme přibližnou hodnotu řešení v dalším uzlovém bodě pomocí hodnoty v uzlu předchozím. Hodnotu řešení v bodě x_0 známe z počáteční podmínky, je rovna y_0 .

Eulerova metoda má i své modifikace. Obě metody jsou druhého řádu. První modifikovaná Eulerova metoda:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (6.14)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \quad (6.15)$$

$$y_{n+1} = y_n + hk_2 \quad (6.16)$$

Druhá modifikovaná Eulerova metoda vypadá následovně:

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (6.17)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \quad (6.18)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2) \quad (6.19)$$

Více se můžete dočíst v [6].

6.3.2 Metody Runge-Kutta

Metody Runge-Kutta jsou jedna z nejdůležitějších skupin jednokrokových metod. Obecný tvar metody Runge-Kutta je:

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 k_1 + \dots + w_s k_s), \quad (6.20)$$

kde

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (6.21)$$

$$k_i = f(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), i = 2, \dots, \quad (6.22)$$

a w_i , α_i a β_i jsou konstanty volené tak, aby metoda měla maximální řád.

U první modifikované Eulerovy metody bylo $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ a $\beta_2 = \frac{1}{2}$, u druhé modifikace $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$ a $\beta_2 = 1$.

Nejproslulejší je následující metoda Runge-Kutta 4. řádu. často, mluví-li se o metodě Runge-Kutta, myslí se tím právě tato konkrétní metoda [6].

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{5}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (6.23)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (6.24)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \quad (6.25)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \quad (6.26)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \quad (6.27)$$

6.3.3 Vícekrokové metody

U vícekových metod počítáme přibližné řešení v dalším uzlovém bodě sítě pomocí několika předchozích uzlů. Protože přitom používáme nejen hodnoty přibližného řešení, ale také hodnoty pravé strany $f(x, y)$ v těchto bodech, budeme kvůli snadnějšímu zápisu používat označení $f_j = f(x_j, y_j)$. Obecně vypadá lineární k -kroková metoda takto:

$$y_{n+1} = a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \dots + a_k y_{n-k+1} + h(b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + \dots + b_k f_{n+1-k}), \quad (6.28)$$

kde k je přirozené číslo a alespoň jedna z konstant a_k , b_k je různá od nuly.

Zřejmou nevýhodou k -krokové metody je, že řešení v prvních k uzlových bodech x_0, \dots, x_{k-1} musíme získat nějakým jiným způsobem. K tomuto účelu se zpravidla používá jednokroková metoda stejného řádu přesnosti, jaký má dále použitá víceková metoda.

Je-li $b_0 = 0$, metoda (6.28) se nazývá explicitní. V tomto případě můžeme hodnotu v novém uzlovém bodě přímo vypočítat dosazením do vzorce (6.28).

Je-li $b_0 \neq 0$, metoda (6.28) se nazývá implicitní. Pak se na pravé straně rovnice 6.28 kromě známých hodnot vyskytuje také $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$, takže y_{n+1} nemůžeme vypočítat přímo, ale v každém kroku musíme řešit rovnici:

$$y_{n+1} = h b_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}) + g, \quad (6.29)$$

s neznámou y_{n+1} , kde $g = \sum_{j=1}^k a_j y_{n+1-j} + h \sum_{j=1}^k b_j f_{n+1-j}$ je známé číslo (v každém kroku jiné)[6].

Mezi explicitní metody patří metoda Adams-Bashford. Její obecný tvar vypadá následovně:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 f_n + b_2 f_{n-1} + \dots + b_k f_{n+1-k}). \quad (6.30)$$

Nejpoužívanější numerickou metodou je však metoda Adams-Bashford čtvrtého řádu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \quad (6.31)$$

Metoda Adams-Moulton je oproti tomu příkladem implicitní metody. Implicitní metoda Adams-Moulton v obecném tvaru vypadá následovně:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_0 f_{n+1} + b_1 f_n + b_2 f_{n-1} + \dots + b_k f_{n+1-k}). \quad (6.32)$$

A pro ukázkou si uvedeme příklad metody Adams-Moulton čtvrtého řádu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \quad (6.33)$$

6.4 Numerické metody pro řešení nelineárních rovnic

V této podkapitole je zaměříme především na řešení jedné nelineární rovnice. Budeme se zabývat řešením nelineární rovnice:

$$f(x) = 0, \quad (6.34)$$

tj. hledáním takových bodu $\xi \in \mathbb{R}$, že $f(\xi) = 0$. Takovéto body budeme nazývat kořeny rovnice [6].

Je zapotřebí nejprve zjistit počet kořenů rovnice a nalézt interval obsahující právě jeden kořen rovnice – separace kořenů rovnice. Následně pak za pomoci numerických metod nalezneme přibližnou hodnotu vybraného kořene rovnice.

Věta 1. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí-li*

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \quad (6.35)$$

pak v intervalu $\langle a, b \rangle$ leží alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$ [6].

Kapitola 7

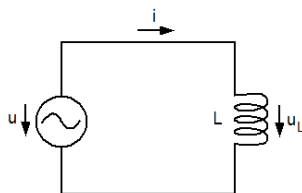
Výpočet frekvenční charakteristiky pomocí diferenciálních rovnic

Abychom mohli využívat diferenciální rovnice k výpočtu elektrických obvodů, nejdříve si uvedeme několik základních diferenciálních rovnic, kterými popisujeme následující obvody.

Ideální cívku v obvodu se střídavým proudem můžeme popsat diferenciální rovnicí:

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (7.1)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i(0). \quad (7.2)$$

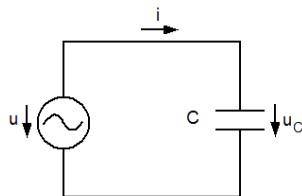


Obrázek 7.1: Schéma obvodu s ideální cívkou

Další obvod, který si popíšeme za pomoci diferenciálních rovnic, je obvod s ideálním kondenzátorem a zdrojem střídavého proudu:

$$i_c(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (7.3)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u(0). \quad (7.4)$$

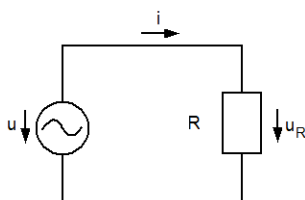


Obrázek 7.2: Schéma obvodu s ideálním kondenzátorem

Poslední obvod s odporem můžeme popsat následujícími rovnicemi:

$$u_R(t) = Ri(t), \quad (7.5)$$

$$i_R(t) = \frac{1}{R}u(t). \quad (7.6)$$



Obrázek 7.3: Schéma obvodu s ideálním odporem

Pro lepší vysvětlení si uvedeme jednoduchý příklad (viz příloha B.8).

7.1 Amplitudová frekvenční charakteristika

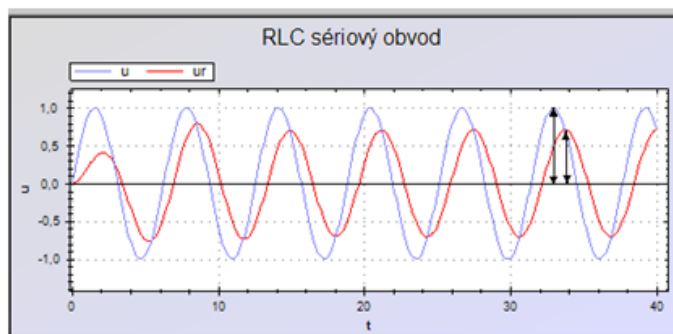
V kapitole 3.3 jsme si uvedli, co to amplitudová charakteristika je. Popisuje závislost poměru amplitudy výstupního k vstupnímu napětí v závislosti na frekvenci. V kapitole 2.2 jsme si uvedli zároveň i vzorec, který nám tuto definici vyjadřuje:

$$A = \frac{U_{out}}{U_{in}} \quad (7.7)$$

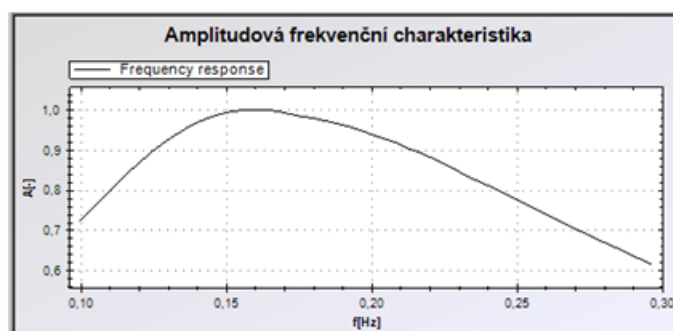
Nyní si vysvětlíme, jakým způsobem budeme postupovat při vykreslování amplitudové frekvenční charakteristiky.

Nejdříve musíme za pomoci programu TKSL/C⁴ vypočítat průběh vstupního a výstupního napětí. Po odeznění přechodového jevu můžeme počítat amplitudy jak vstupního, tak výstupního napětí (viz obr. 7.4), které pro výpočet budeme potřebovat. Podílem těchto dvou hodnot získáme hodnotu napěťového přenosu pro danou frekvenci. Výsledný graf bude tedy zobrazovat průběh napěťového přenosu na frekvenci. Graf je výstupem vlastního programu Frequency and phase characteristics - TKSL/C (viz obr. 7.5). Více se dočtete v kapitole 8.

⁴Dostupné na: <http://www.fit.vutbr.cz/~kunovsky/TKSL/download.html.cs>.



Obrázek 7.4: Amplitudová frekvenční charakteristika - odečtení amplitud vstupního a výstupního napětí (program FAPC-TKSL/C)



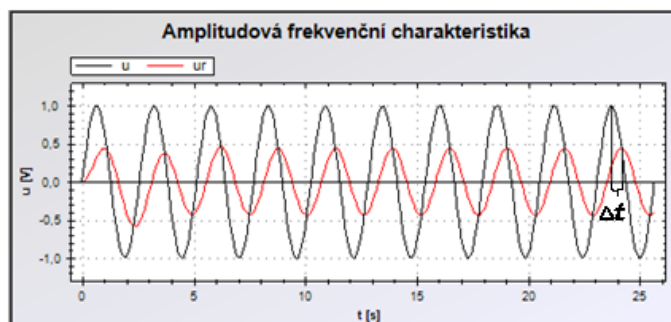
Obrázek 7.5: Výsledná amplitudová frekvenční charakteristika (program FAPC-TKSL/C)

7.2 Fázová frekvenční charakteristika

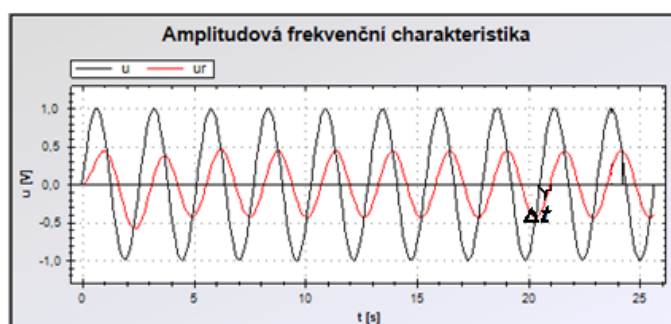
Pro grafické vyjádření fázové frekvenční charakteristiky je potřeba následujícího vzorce:

$$\varphi = 360 \cdot \Delta t \cdot \frac{2\pi}{\omega} \quad (7.8)$$

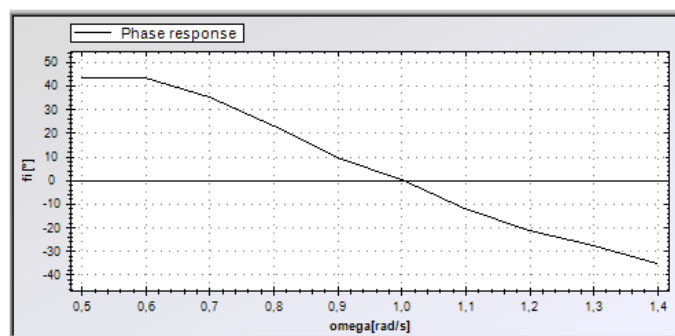
kde φ je fázový posun výstupního napětí oproti vstupnímu, ω je frekvence a Δt je časový posun výstupního napětí oproti vstupnímu. Časový posun Δt vypočítáme jako rozdíl $t_2 - t_1$, kde t_1 je čas amplitudy vstupního napětí a t_2 je čas amplitudy výstupního napětí (viz obr. 7.6). Čas musíme odečítat ve stejné periodě a opět musíme dát pozor na to, abychom odečítali hodnoty až po odeznění přechodového jevu. Pro přesnější výsledky je vhodné použít čas, kdy budou napětí rovna 0 (viz obr. 7.7).



Obrázek 7.6: Fázová frekvenční charakteristika - odečtení času amplitud napětí (program FAPC-TKSL/C)



Obrázek 7.7: Fázová frekvenční charakteristika - vhodnější řešení (program FAPC-TKSL/C)



Obrázek 7.8: Výsledná fázová frekvenční charakteristika (program FAPC-TKSL/C)

Kapitola 8

Návrh a implementace uživatelského rozhraní

Program TKSL/C je nová verze simulačního nástroje TKSL/386, který je napsán v jazyce C++. Jelikož program TKSL/C nemá žádné grafické uživatelské rozhraní, bylo také cílem této bakalářské práce vytvořit takové rozhraní, které by umožňovalo uživatelům textově zadávat rovnice pro výpočet elektrických obvodů a vytvořit grafické znázornění výstupních dat. Výhodou programu TKSL/C je, že ho lze ovládat za pomoci příkazové řádky, což může být velmi dobře využito při programování uživatelského rozhraní.

8.1 Požadavky na aplikaci

Nejdříve je zapotřebí si určit požadavky, které jsou kladeny na výsledné uživatelské rozhraní:

- textové zadávání rovnic popisující elektrické obvody,
- načítání vstupního souboru s rovnicemi,
- výběr z předem připravených příkladů elektrických obvodů,
- nastavení parametrů programu (např. počáteční či koncová frekvence apod.),
- nastavení parametrů elektrického obvodu včetně výběru výstupního napětí,
- vykreslení grafů amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky,
- znázornění fázové frekvenční charakteristiky pomocí jednotkové kružnice,
- přehrávání a zoomování grafu,
- výpis hodnot při přejetí kurzoru přes graf,
- nastavení barev čar a pozadí grafů.

8.2 Návrh řešení problému

Při návrhu aplikace je zapotřebí stanovit, jaký programovací jazyk bude pro výslednou aplikaci zvolen.

Aplikace má sloužit jako nadstavba nad stávající verzí TKSL/C, proto bude používat program TKSL/C. Samotná aplikace, která spouští a využívá program TKSL/C, byla naprogramována v jazyce C# v prostředí Microsoft Visual Studio 11 Beta⁵ s využitím knihovny ZedGraph⁶. Knihovna ZedGraph slouží k vykreslování 2D grafů.

8.3 Algoritmy výpočtu frekvenční charakteristiky

Nyní se podíváme na to, jak bychom zobrazili fázovou a amplitudovou frekvenční charakteristiku za pomoci programu TKSL/C. Algoritmus vykreslení amplitudové frekvenční charakteristiky vypadá následovně:

1. Nejdříve popíšeme obvod za pomoci diferenciálních rovnic.

$$\begin{aligned}u_R &= Ri \\u'_c &= \frac{1}{Ci} \\u_c(0) &= 0 \\i' &= \frac{1}{L}(u - u_R - u_c) \\i(0) &= 0\end{aligned}$$

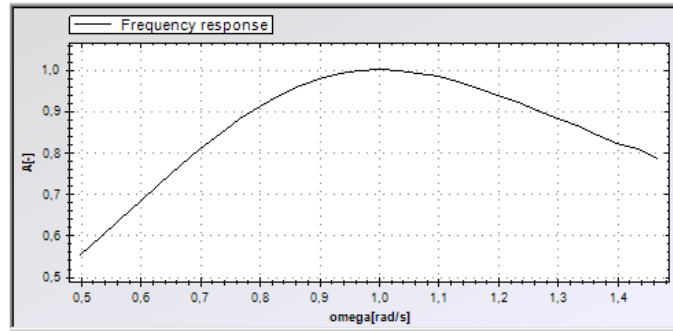
2. Nastavíme frekvenci na počáteční hodnotu.
3. Vykreslíme průběh vstupního a výstupního napětí za pomoci TKSL/C. Příklad programu pro RLC sériový obvod:

```
eps = 1e-8;
R = 1;
L = 1;
C = 1;
omega = 0.1;
u = 1*sin(omega*t);
uc' = (1/C)*iL & 0;
iL' = (1/L)*(u-uc-(R*iL)) & 0;
ur = R*iL;
```

4. Odečteme z výstupu amplitudy vstupního a výstupního napětí. Měřit však musíme až po odeznění přechodového jevu.
5. Zpřesníme hodnotu amplitudy, abychom dosáhli zadané přesnosti.
6. Vypočítáme napěťový přenos podle vzorce (3.11).
7. Změníme hodnotu frekvence ω podle zadaného kroku.
8. Pokud je hodnota ω menší než zadaná maximální hodnota frekvence, vrátím se zpět k bodu 3), jinak pokračujeme dál.
9. Vykreslíme graf závislosti napěťového přenosu na frekvenci (viz obr. 8.1).

⁵Dostupné na: <http://www.microsoft.com/visualstudio/eng/downloads>.

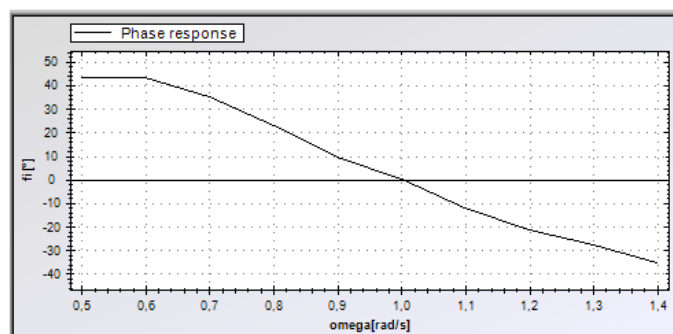
⁶Dostupné na: <http://sourceforge.net/projects/zedgraph/>.



Obrázek 8.1: Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu

Abychom zobrazili fázovou frekvenční charakteristiku RLC sériového obvodu, budeme postupovat podle následujícího algoritmu:

- Body 1., 2. and 3. jsou shodné s algoritmem pro výpočet frekvenční charakteristiky.
4. Odečteme z výstupu čas, kdy dosáhne výstupní a vstupní napětí své amplitudy (t_1 – vstupní, t_2 – výstupní). Měřit však musíme až po odeznění přechodového jevu ve stejné periodě. Lepší variantou je však odečíst čas, kdy hodnota vstupního i výstupního napětí bude rovna 0. Výpočet by byl přesnější.
5. Zpřesníme hodnotu amplitudy, abychom dosáhli zadané přesnosti.
6. Vypočteme fázový posuv pro danou frekvenci podle vzorce (7.8).
7. Změníme hodnotu frekvence ω podle zadaného kroku.
8. Pokud je hodnota ω menší než zadaná maximální hodnota frekvence, vrátím se zpět k bodu 3), jinak pokračujeme dál.
9. Vykreslíme graf závislosti fázového posuvu na frekvenci (viz obr. 8.2).



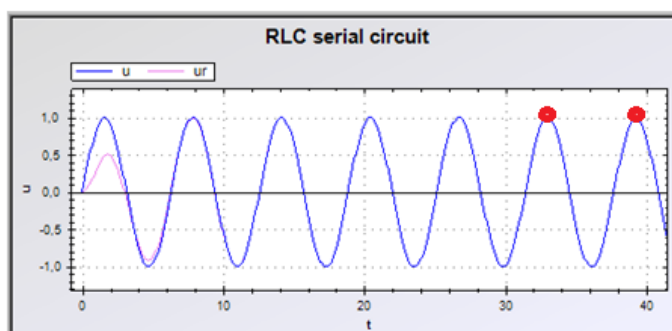
Obrázek 8.2: Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program FAPC-TKSL/C)

8.3.1 Řešení přechodového jevu

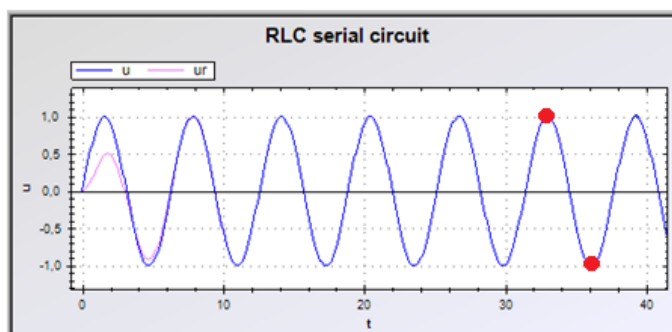
S programovým řešením amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky se pojí několik problémů. Tím prvním je přechodový jev. Amplitudu napětí můžeme odečítat až po jeho odeznění. Jak ale zjistíme, že přechodový jev odezněl? Je nutné porovnat hodnoty po sobě následujících amplitud (tímto způsobem je řešen problém i v aplikaci, viz obr. 8.3). Další možností je porovnávat amplitudy napětí v záporném a kladném směru v téže amplitudě (viz obr. 8.4). V obou případech platí rovnice:

$$|max_1 - max_0| < \epsilon, \quad (8.1)$$

kde ϵ odpovídá hodnotě zadané přesnosti výpočtu.



Obrázek 8.3: Přechodový jev - porovnání hodnot dvou po sobě následujících amplitud (program FAPC-TKSL/C)



Obrázek 8.4: Přechodový jev - porovnání hodnot amplitud v kladném a záporném směru (program FAPC-TKSL/C)

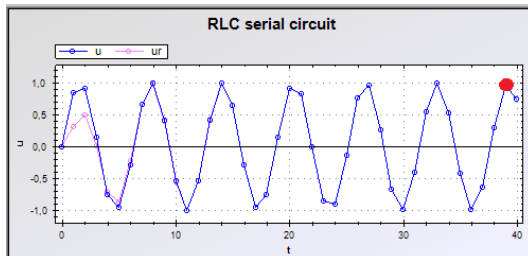
8.3.2 Řešení přesnosti hodnoty amplitudy

Dalším problémem je přesnost hodnoty amplitudy. Přesnější hodnotu amplitudy můžeme dosáhnout různými numerickými metodami. V aplikaci je použito půlení integračního kroku. Abychom rozpůlili integrační krok, je zapotřebí zdvojnásobit počet kroků výpočtu při vykreslování průběhů vstupního a výstupního napětí (viz obr. 8.5 a 8.6). Následně je potřeba

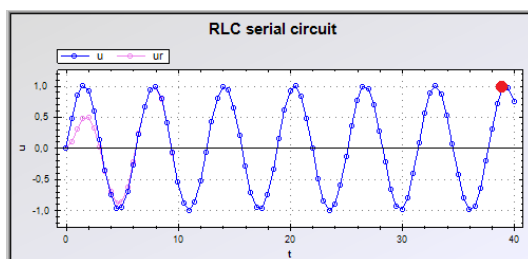
porovnat nově získanou hodnotu amplitudy s původní. Jejich rozdíl nesmí být větší než zadané přesnost:

$$|max_1 - max_0| < \epsilon, \quad (8.2)$$

kde ϵ odpovídá hodnotě zadané přesnosti výpočtu.



Obrázek 8.5: Přesnost výpočtu amplitudy - $s = 1$ (program FAPC-TKSL/C)



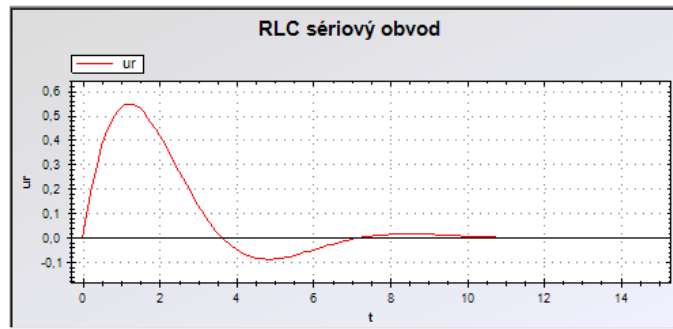
Obrázek 8.6: Přesnost výpočtu amplitudy - $s = 0.5$ (program FAPC-TKSL/C)

8.3.3 Řešení rozsahu frekvence

Touto problematikou jsme se již dříve zabírali, a to v příkladech 5, 6 a 7, kde se rezonanční frekvence počítala pomocí symbolicko-komplexní metody. Rezonanční frekvenci lze však vypočítat také s využitím diferenciálních rovnic a to následujícím způsobem.

Nejdříve odečteme periodu na výstupu odezvy systému na jednotkový impuls (viz obr. 8.7). Program v TKSL/C:

```
eps = 1e-8;
R = 1;
L = 1;
C = 1;
u = 1;
uc' = (1/C)*iL & 0;
iL' = (1/L)*(u-uc-(R*iL)) & 0;
ur = R*iL;
```

Obrázek 8.7: Odečtení periody z průběhu odezvy systému na jednotkový impuls (program FAPC-TKSL/C)

Z grafu můžeme odečíst periodu, která je rovna přibližně 7s. Tuto hodnotu dosadíme do následujícího vzorce, pomocí něhož vypočítáme amplitudovou frekvenci RLC sériového systému.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

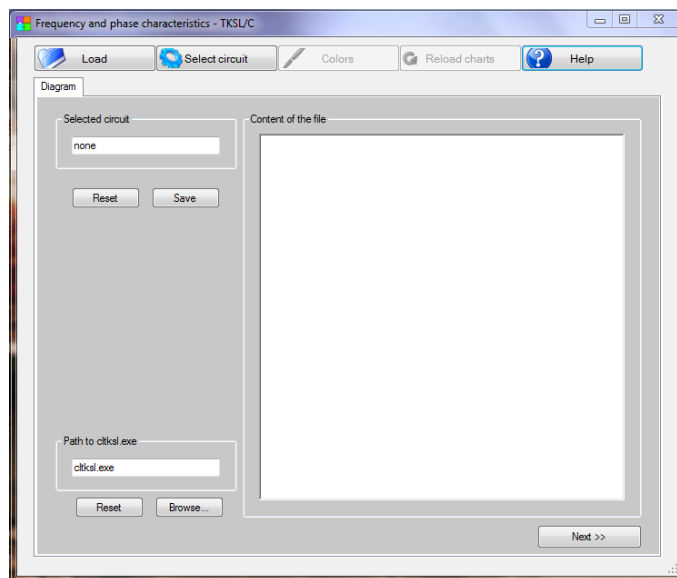
$$\omega = \frac{2\pi}{7}$$

$$\omega \doteq 0.897 \doteq 1[Hz]$$

Když známe přibližnou hodnotu rezonanční frekvence, můžeme lépe určit rozsah vykreslené frekvence.

8.4 Implementace aplikace

Teď už se dostaneme k implementaci samotné aplikace. Po spuštění se otevře hlavní okno aplikace. Horní část okna je tvořena řadou tlačítek. Pod ní jsou umístěné panely, z nichž jen jeden není skrytý. Ostatní se otevřou až v dalších krocích. Poslední částí hlavního okna je stavový řádek, který slouží pro výpis chybových a informačních zpráv.



Obrázek 8.8: Hlavní okno aplikace

V prvním panelu aplikace se nachází prostor pro přímé zadávání diferenciálních rovnic, popř. se zde vypíše obsah vybraného souboru či rovnice popisující vybraný elektrický obvod. Dále zde najdete informace o jméně vybraného souboru nebo cestu k programu `cltksl.exe`. Je nutné nainstalovat si program TKSL/C a zadat aplikaci cestu k tomuto souboru. Ve druhém panelu se nachází parametry souboru a programu. V poslední části najdeme výsledné grafy včetně tlačítek pro spuštění jejich přehrávání.

Po spuštění aplikace se jednotlivé panely postupně zobrazí při stlačení tlačítka *Next* na předešlém panelu. Tím je docílena přehlednost a srozumitelnost při práci s aplikací.

8.4.1 Zadávání vstupních rovnic

Uživatel má tři možnosti, jak může zadat diferenciální rovnice, které popisují daný obvod. Jednou z nich je přímé zadání rovnic do prostoru na prvním panelu aplikace. Dále je nutné zadat jméno souboru a soubor zadaných rovnic uložit. Další možností je vybrat tlačítkem *Load* již vytvořený soubor s rovnicemi. Poslední možností je pak pomocí tlačítka *Select circuit* otevřít nové okno (viz příloha A.1), které nabízí výběr z několika elektrických obvodů, jejichž rovnice jsou uloženy v připojeném souboru. Všechny rovnice, ať už byly vybrány kteroukoliv z výše uvedených metod, lze editovat.

8.4.2 Nastavení parametrů

Po zadání diferenciálních rovnic a načtení druhého panelu může uživatel upravit parametry elektrického obvodu (vlastnosti elektrických součástek, vstupního napětí). Parametry obvodu jsou automaticky vybrány ze vstupního souboru. Dále je zapotřebí zadat počáteční a koncovou frekvenci. Ty udávají rozsah frekvence, která bude ve výstupních grafech vykreslena. Uživatel zde také zadá počet kroků, neboli počet bodů v grafu a vybere výstupní napětí.

8.4.3 Výsledné grafy

Po vykreslení grafu amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky a jednotkové kružnice může uživatel upravit barevné nastavení, tedy barvy vykreslených čar a pozadí grafů. Pomocí tlačítka *Colors* se otevře nové okno s možností nastavení barev (viz příloha A.2). Tlačítko *Help* slouží k otevření okna s nápovědou, jak ovládat aplikaci (viz příloha A.3). Pokud změníme parametry grafů, můžeme za pomoci tlačítka *Reload* grafy přepočítat a znovu vykreslit.

Po najetí kurzoru přes čáry grafu se v pravé části třetího panelu (viz příloha A.4) vypíše informace o příslušných bodech grafu. V téže části se budou měnit i v případě přehrávání, které lze ovládat za pomoci tlačítek v sekci *Play*. Další možností grafu je zoomování popřípadě oddalování podle potřeby uživatele.

8.4.4 Chybová hlášení

Informační a chybové zprávy se vypisují ve stavovém řádku. Chybová zpráva je vypsána v těchto případech:

- nezadání diferenciálních rovnic nebo jejich špatné zadání
- nezadání parametrů skriptu nebo zadání mimo jejich rozsah

Veličina	Podmínka
Počáteční frekvence	> 0
Koncová frekvence	> 0
Počet kroků	> 0

Tabulka 8.1: Tabulka správného rozsahu parametrů skriptu

- nezadání parametrů elektrického obvodu nebo zadání mimo jejich rozsah (nesmí být záporná)
- chyba při výpočtu programu

8.4.5 Výpočet frekvenční charakteristiky

Nyní si ukážeme implementaci algoritmu z kapitoly 8.3. Celý algoritmus je naprogramovaný ve funkci *Script()*. Pro každou frekvenci z rozmezí počáteční až koncová frekvence podle zadaného kroku se spustí pomocí funkce *processTKSL.Start()* program TKSL/C včetně vstupního souboru a sady parametrů. Výstupem programu TKSL/C je XML soubor, který sestává v závislosti od zadaných rovnic ze sekvence:

```
<results>
  <r id='t' v=' 1.0000000000e-01' />
  <r id='iL' v=' 6.7555840292e-03' />
  <r id='u' v=' 1.3954311464e-01' />
  <r id='uc' v=' 2.2727716579e-04' />
  <r id='ur' v=' 6.7555840292e-03' />
  <r id='\#' v='8' />
</results>
```

Pomocí funkce *FindSteadyState()* se načtou ze souboru data a nalezne se amplituda. Porovnáním amplitud zjistíme, zda došlo k ustálení amplitudy, pokud ne, zvýšíme počet period *countPeriod* a provede opět výpočet. Dále zpřesníme výpočet amplitudy opakováním výpočtu a postupným půlením integračního kroku *stepCounting*.

Nyní vypočítáme hodnoty amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky pomocí funkce *AddPoint()*. Ta nám vypočtené body uloží také do struktury. Po vypočítání všech bodů grafů se vykreslí výsledné grafy pomocí funkce *CreateGraph()*.

Kapitola 9

Srovnání Maple, MATLAB a FAPC - TKSL/C

V této kapitole si ukážeme srovnání výsledků výpočtů za pomoci tří způsobů – pomocí programu Maple, MATLAB a FAPC - TKSL/C .

Maple je systém počítačové algebry pro výuku a využití matematiky v přírodovědných, technických a ekonomických oborech, který umožňuje symbolické a numerické matematické výpočty, jejich počítačovou vizualizaci, dokumentaci a publikaci. Maple je vyvíjen firmou Maplesoft⁷.

MATLAB je programovací prostředí pro návrh algoritmů, analýzu dat, jejich vizualizaci a numerické výpočty. Je zaměřen na práci s maticemi a díky tomu je v této oblasti mnohem rychlejší než běžné programovací jazyky jako je C, C++ nebo Fortran¹.

Nyní si předvedeme několik příkladů srovnání těchto tří programů. Součástí příkladu bude vždy zdrojový kód a výstupní graf daného programu.

Příklad 3. Je dán RLC sériový obvod s parametry $R = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$ a vstupní napětí $u = 1V$. Vykreslete amplitudovou a fázovou charakteristiku tohoto obvodu (použitím programů a) Maple, b) MATLAB a c) FAPC - TKSL/C).

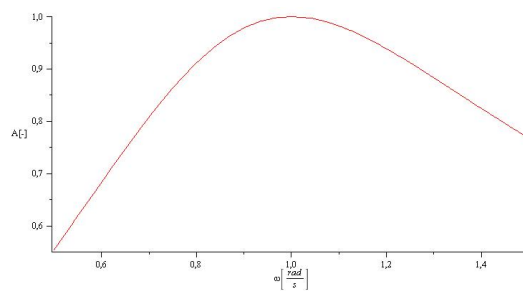
a) Zdrojový kód pro Maple

```
R := 1; L := 1; C := 1; u := 1;
Z := R + I·ω·L +  $\frac{1}{I·ω·C}$ ;
I0 :=  $\frac{u}{Z}$ ;
ur := R·I0;
plot(sqrt(ℜ(ur)2 + ℑ(ur)2), ω = 0.5..1.5);
```

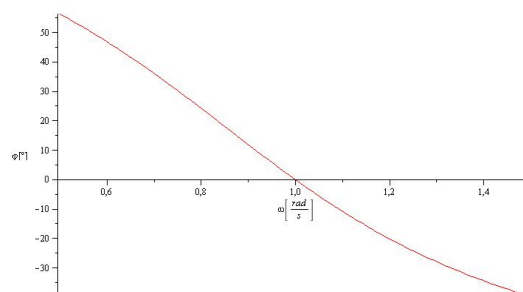
⁷Dostupné na: <http://www.maplesoft.com>.

¹Dostupné na: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.

Výsledné grafy:



Obrázek 9.1: Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program Maple)

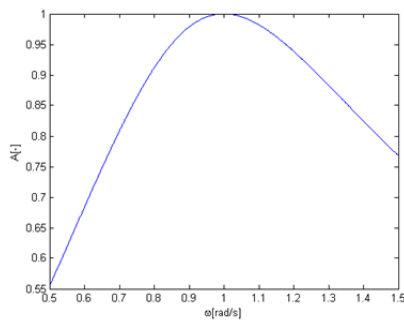


Obrázek 9.2: Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program Maple)

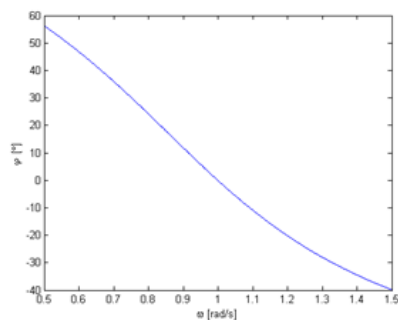
b) Zdrojový kód pro MATLAB

```
R=1,L=1,C=1,u=1,omega=0.5:0.001:1.5;
ur=(R.*u./(R+j.*omega.*L+1./(j.*omega.*C)));
figure (1)
plot(omega,sqrt(imag(ur).^2+real(ur).^2));
xlabel('\omega[rad/s]');
ylabel('A[-]');
figure (2)
plot(omega,arctan(imag(ur)./real(ur)).*180./pi);
xlabel('\omega [rad/s]');
ylabel('$\varphi$ [$^\circ$'],'Interpreter','latex');
```

Výsledné grafy:



Obrázek 9.3: Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program MATLAB)



Obrázek 9.4: Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program MATLAB)

c) Zdrojový kód pro FAPC - TKSL/C

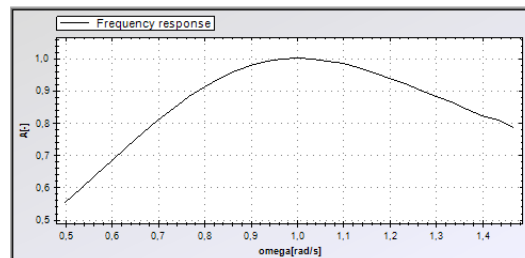
```
R = 1;
L = 1;
```

```

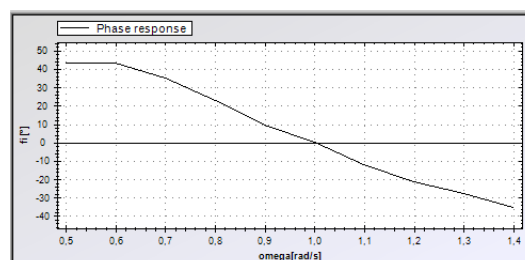
C = 1;
u = sin(0.5*t);
uc' = (1/C)*iL & 0;
iL' = (1/L)*(u-uc-(R*iL)) & 0;
ur = R*iL;

```

Výsledné grafy:



Obrázek 9.5: Amplitudová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program FAPC - TKSL/C)



Obrázek 9.6: Fázová frekvenční charakteristika RLC sériového obvodu (program TKSL/C)

Další příklady pro srovnání najdete v příloze (viz [B.9](#) a [B.10](#)).

Kapitola 10

Závěr

Existuje mnoho způsobů vyšetřování frekvenčních charakteristik. Mezi klasické metody řadíme například symbolicko-komplexní metodu, která je názorná a relativně jednoduchá. Její hlavní nevýhodou je však to, že je obtížné ji aplikovat u složitějších elektrických obvodů. Z tohoto důvodu je výhodné využít metodu vyšetřování s použitím diferenciálních rovnic.

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit se s těmito metodami vyšetřování frekvenčních charakteristik a vzájemně je srovnat. Dále bylo za úkol vytvořit algoritmus pro výpočet charakteristik a grafické uživatelské rozhraní pro program TKSL/C, které má sloužit k zadávání diferenciálních rovnic a poskytnout výstup v podobě grafů.

Nejdříve byl vytvořen algoritmus pro výpočet frekvenční charakteristiky se zaměřením na výpočet ustálené amplitudy a stanovení vhodného integračního kroku. Při snímání vstupního a výstupního napětí dochází k přechodovému jevu. Po jisté době se však amplituda napětí ustálí a v tomto okamžiku odečteme její hodnoty. Aby bylo dosaženo ještě přesnějších výsledků, byla použita půlení integračního kroku. Program se znovu spustí a to se opakuje tak dlouho, dokud není splněna podmínka požadované přesnosti.

Dále bylo za pomoci jazyka C# ve vývojovém prostředí Microsoft Visual Studio 11 Beta naprogramováno grafické uživatelské rozhraní, které slouží jako nadstavba nad TKSL/C. Program TKSL/C umožňuje zadávání rovnic a parametrů pouze za pomoci příkazového řádku. Cílem proto bylo vytvořit uživatelsky vstřícnější prostředí, které poskytuje možnost zadávat rovnice, editovat je a dále také přehlednější volení parametrů jak samotného elektrického obvodu, tak i samotného skriptu. Výstupem aplikace jsou grafy amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky a také jednotková kružnice, která názorněji zobrazuje fázovou frekvenční charakteristiku.

Součástí této bakalářské práce je dále řada příkladů, které ukazují aplikaci jednotlivých metod výpočtů frekvenčních charakteristik. Nakonec bylo provedeno srovnání výpočtů elektrických obvodů pomocí programů MATLAB, Maple a FAPC - TKSL/C. Srovnávané grafy jsou velice podobné, ačkoliv grafy aplikace zatím nedosahují tak velké přesnosti.

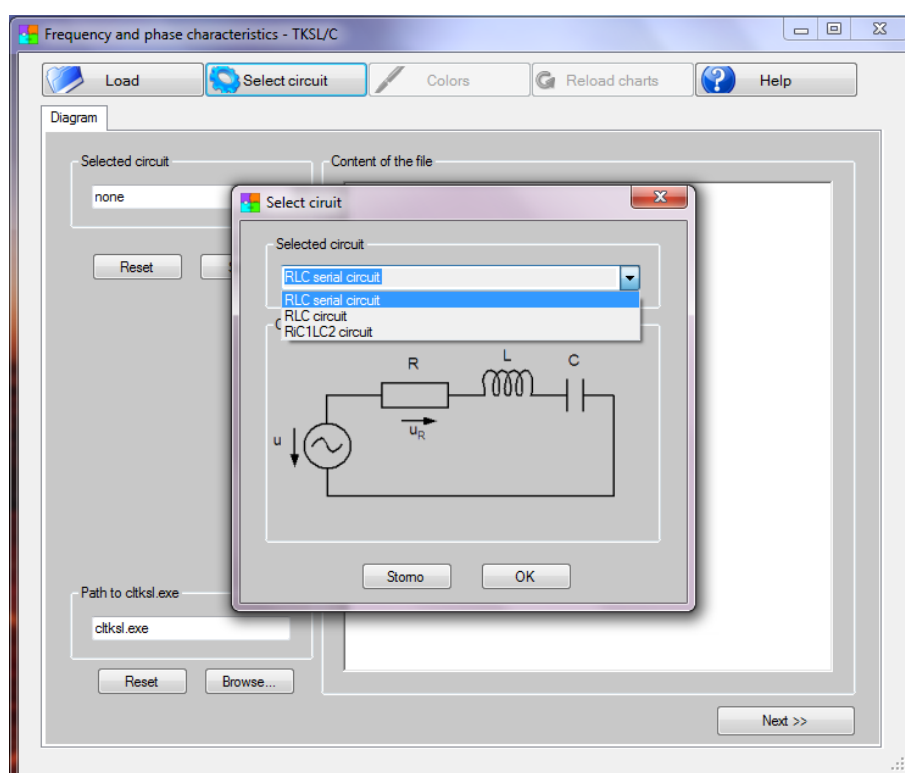
Program je značně pomalý, což je způsobeno opakovaným spouštěním výpočtu a vykreslování celého průběhu vstupního a výstupního napětí, což lze vyřešit použitím výpočtu po jednotlivých krocích. Dalším problémem je, že při výpočtu fázové frekvenční charakteristiky byl použit čas amplitudy napětí. Přesnější výsledky bychom však získali, použijeme-li čas, kdy hodnota napětí je rovna nule. V tomto případě by se musela použít jedna z metod řešení nelineárních rovnic (např. metoda půlení intervalů).

Literatura

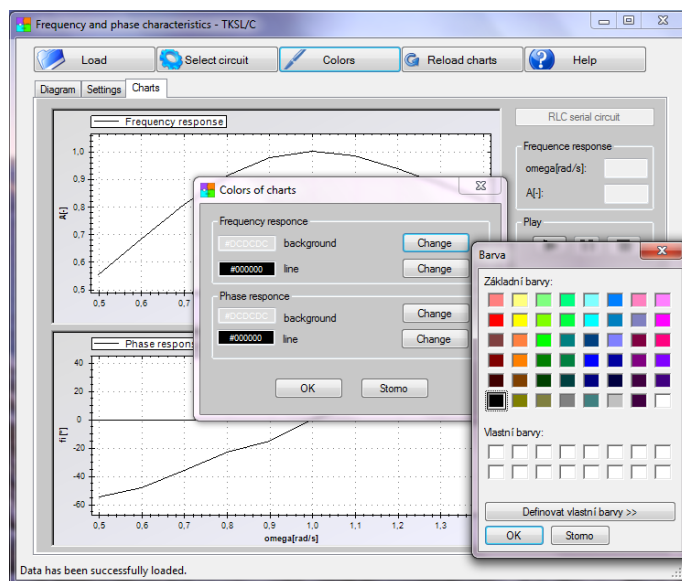
- [1] Bezděk, M.: *Elektronika*. Kopp, 2004, iSBN 80-723-2171-4.
- [2] Blahovec, A.: *Elektrotechnika II*. Informatorium, 1997, iSBN 80-860-7319-X.
- [3] Blahovec, A.: *Elektrotechnika III*. Informatorium, 1999, iSBN 80-860-7350-5.
- [4] Diblík, J.: *Matematika II*. Vysoké učení technické VUT, 2004.
- [5] Dostál, T.: *Elektrické filtry*. Vysoké učení technické VUT, 2004, iSBN 80-214-0877-4.
- [6] Fajmon, B.; Ruzičková, I.: *Matematika 3*. Vysoké učení technické VUT, 2005.
- [7] Hájek, K.: *Kmitočtové filtry*. BEN, 2002, iSBN 80-730-0023-7.
- [8] Maplesoft: *Math Software for Engineers, Educators and Students*. [cit. 10-6-2010], uRL: <http://www.maplesoft.com/> [online].
- [9] MathWorks, T.: *MATLAB and Simulink for Technical Computing*. [cit. 10-6-2010], uRL: <http://www.mathworks.com> [online].
- [10] Mikulec, M.; Havlíček, V.: *Základy teorie elektrických obvodů*.
- [11] Murina, M.: *Teorie obvodů*. skriptá VUT, Brno, 2000.
- [12] Myslík, J.: *Elektrické obvody*. BEN, 1998, iSBN 80-860-5619-8.
- [13] software, T.: *High Performance Computing*. [cit. 10-6-2010], uRL: <http://www.fit.vutbr.cz/~kunovsky/TKSL/index.html.en> [online].
- [14] Turzík, D.; Dubcová, M.; Pavlíková, P.: *Základy matematiky pro bakaláře*. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2011, iSBN 978-80-7080-787-3.

Příloha A

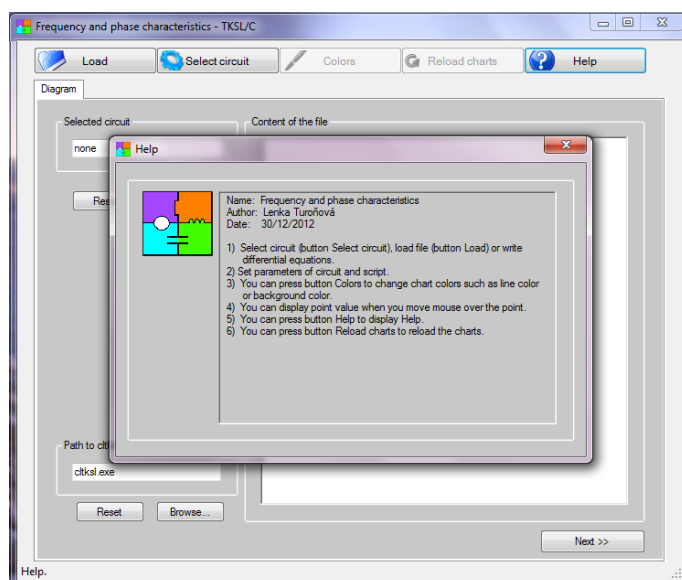
Obrázky výsledné aplikace



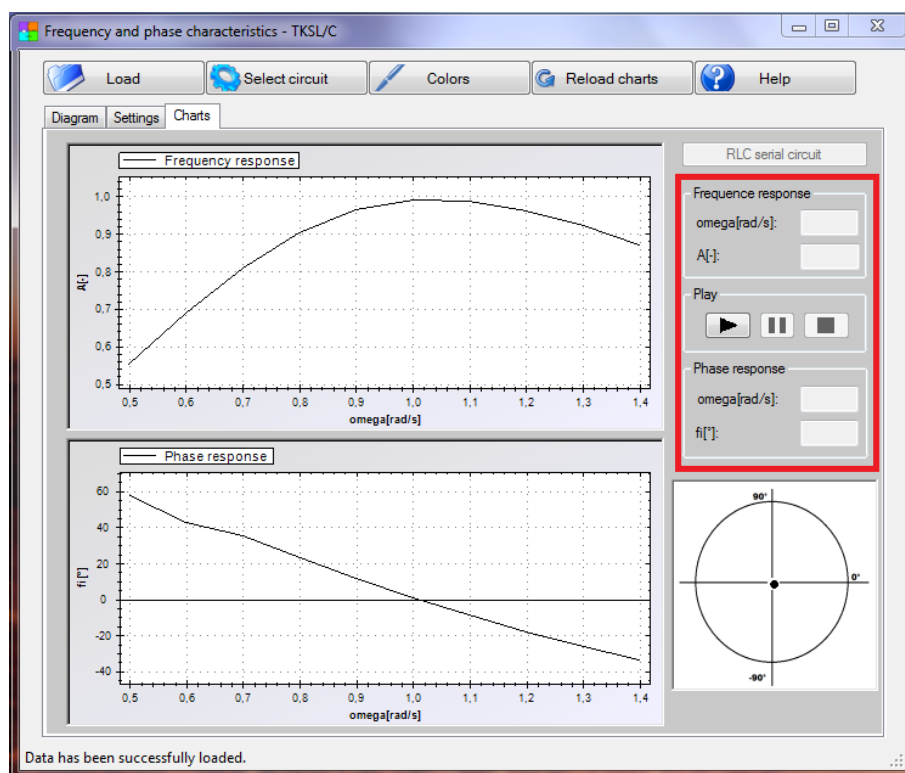
Obrázek A.1: Výběr elektrického obvodu



Obrázek A.2: Výběr barev grafů



Obrázek A.3: Návod

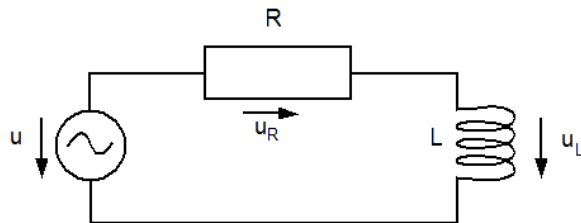


Obrázek A.4: Informace o bodech grafů a ovládání přehrávání grafů

Příloha B

B.1 Příklad s komplexními čísly

Příklad 4. Je dán RL sériový obvod se zdrojem střídavého napětí. Vypočtete napětí na odporu a cívce a zakreslete výsledky do Gaussovy roviny.



Obrázek B.1: Schéma RL sériového obvodu

$$L = 0.1[H]$$

$$R = 10[\Omega]$$

$$\omega = 100[rad/s]$$

$$u = 200 \sin(\omega t)[V]$$

$$Z = R + j\omega L$$

$$Z = 10 + j10$$

$$Z = 10(1 + j)$$

$$i = \frac{u}{Z}$$

$$i = \frac{200}{10(1 + j)} = \frac{20}{1 + j} = \frac{20}{1 + j} \cdot \frac{1 - j}{1 - j} = \frac{20 - j20}{1 + 1}$$

$$i = 10 - j10[A]$$

$$u_L = i \cdot (j\omega L)$$

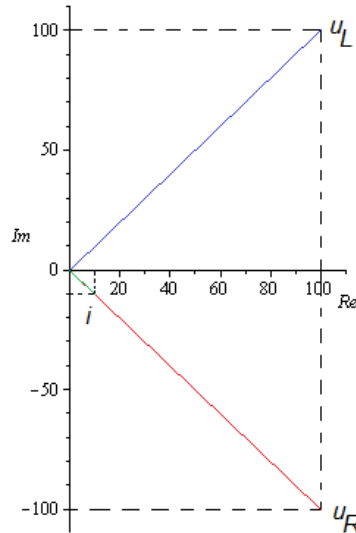
$$u_L = (10 - j10) \cdot (j \cdot 100 \cdot 10)$$

$$u_L = 100 + j100[V]$$

$$u_R = i \cdot R$$

$$u_R = (10 - j10) \cdot 10$$

$$u_R = 100 - j100[V]$$



Obrázek B.2: Zobrazení výsledků v Gaussově rovině (u_L, u_R, i)

B.2 Příklad RL sériového obvodu

Příklad 5. Je dán RL sériový obvod. Nechť odpor R má hodnotu 1Ω , indukance cívky L hodnotu $1H$ a amplituda zdroje střídavého napětí je rovna $1V$. Vypočtěte pro tyto hodnoty frekvenční amplitudovou a fázovou charakteristiku a vykreslete jejich grafy.

Když do rovnice (5.7) dosadíme zadané hodnoty, bude rovnice amplitudové frekvenční charakteristiky a její graf vypadat následovně:

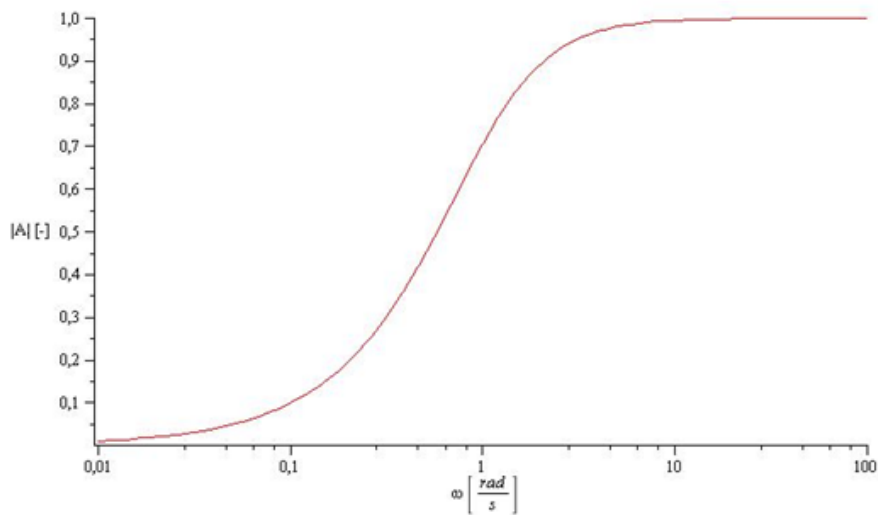
$$A = \frac{j \cdot \omega}{1 + j \cdot \omega} [-].$$

Můžeme si ověřit, zda je graf správný a to tak, že si vypočteme hodnotu frekvence, při které dochází ke zlomu. Frekvenci zlomu jsme si již odvodili dříve (3.16). Nyní stačí jen dosadit konkrétní hodnoty.

$$\omega_m = \frac{R}{L} = \frac{1}{1} = 1[rad/s]$$

Když do rovnice (5.19) dosadíme zadané hodnoty, bude rovnice fázové frekvenční charakteristiky a její graf vypadat následovně:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega}\right)[rad].$$



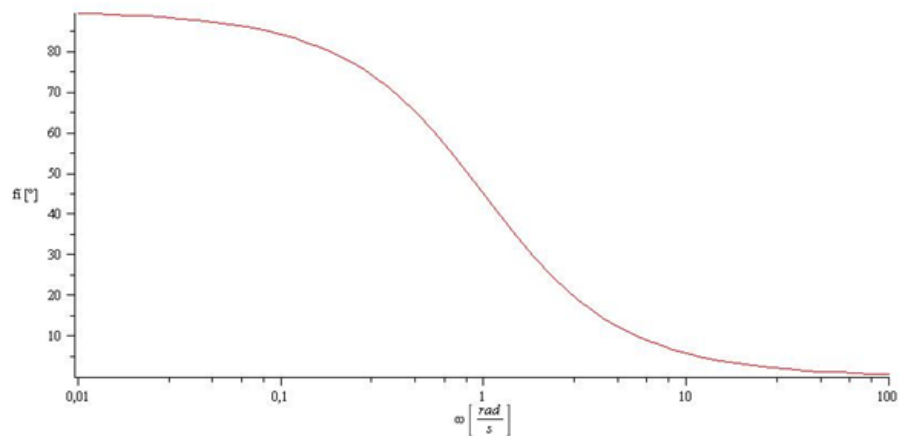
Obrázek B.3: Graf amplitudové frekvenční charakteristiky RL sériového obvodu na cívice

B.3 Příklad RC sériového obvodu

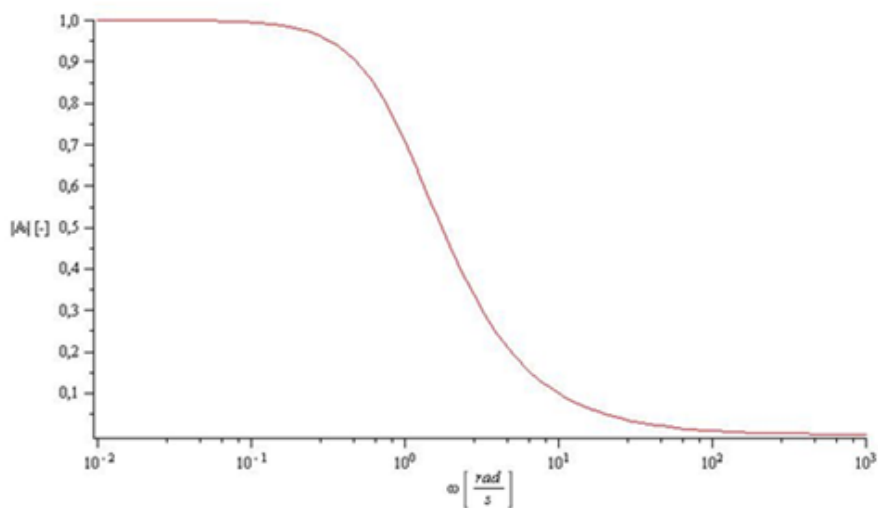
Příklad 6. Je dán RC sériový obvod. Nechť odpor R má hodnotu 1Ω , kapacita kondenzátoru C hodnotu $1F$ a amplituda zdroje střídavého napětí je rovna $1V$. Vypočtěte pro tyto hodnoty frekvenční amplitudovou a fázovou charakteristiku a vykreslete jejich grafy.

Pokud dosadíme zadané hodnoty do rovnice (5.26), amplitudová frekvenční charakteristika by vypadala následovně:

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{j \cdot \omega}} [-].$$



Obrázek B.4: Graf fázové frekvenční charakteristiky RL sériového obvodu na cívce



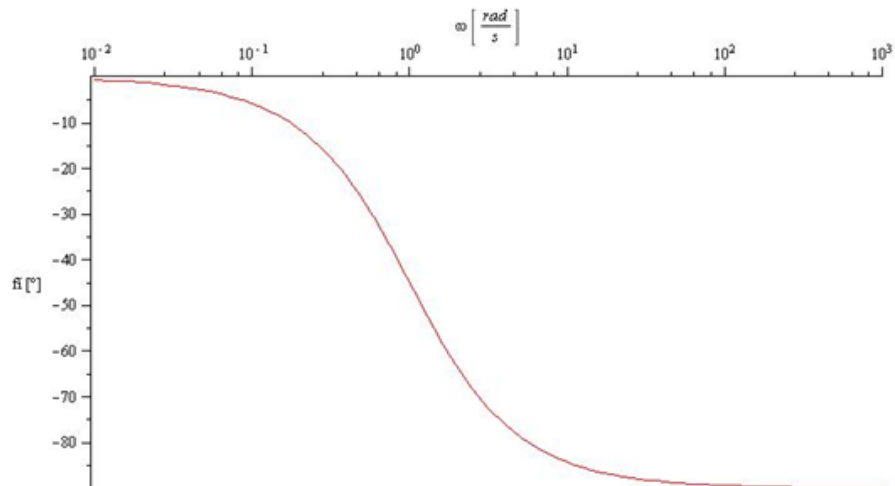
Obrázek B.5: Graf amplitudové frekvenční charakteristiky RC sériového obvodu na cívce

Nyní si můžeme ověřit, zda graf je správný a to tak, že si vypočteme hodnotu frekvence, při které dochází ke zlomu. Frekvenci zlomu jsme si již odvodili dříve (3.14). Teď stačí jen dosadit konkrétní hodnoty.

$$\omega_m = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 = 10^0 [\text{rad/s}]$$

Když do rovnice (5.36) dosadíme zadané hodnoty, bude rovnice fázové frekvenční charakteristiky a její graf vypadat následovně:

$$\varphi = \arctan(-\omega) [\text{rad}].$$



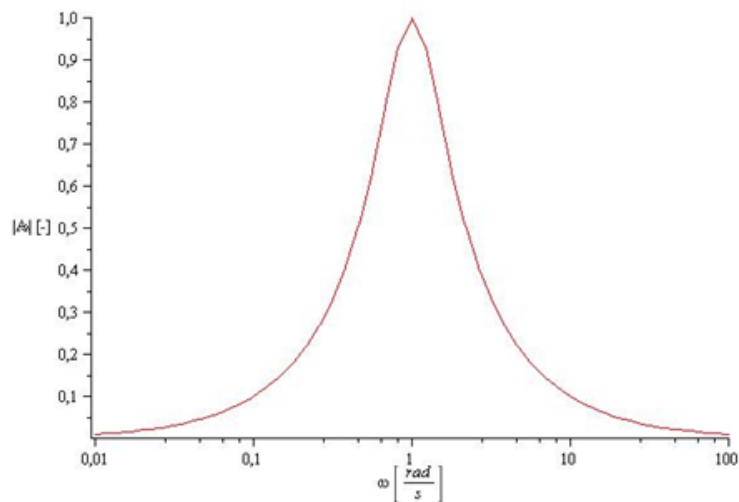
Obrázek B.6: Graf fázové frekvenční charakteristiky RC sériového obvodu na cívce

B.4 Příklad RLC sériového obvodu

Příklad 7. Je dán RLC sériový obvod. Nechť odpor R má hodnotu 1Ω , kapacita kondenzátoru C hodnotu $1F$, indukčnost cívky L hodnotu $1H$ a amplituda zdroje střídavého napětí je rovna $1V$. Vypočtete pro tyto hodnoty frekvenční amplitudovou a fázovou charakteristiku a vykreslete jejich grafy.

Pokud do rovnice (5.43) dosadíme zadané hodnoty, bude amplitudová frekvenční charakteristika pro tento obvod vypadat následovně:

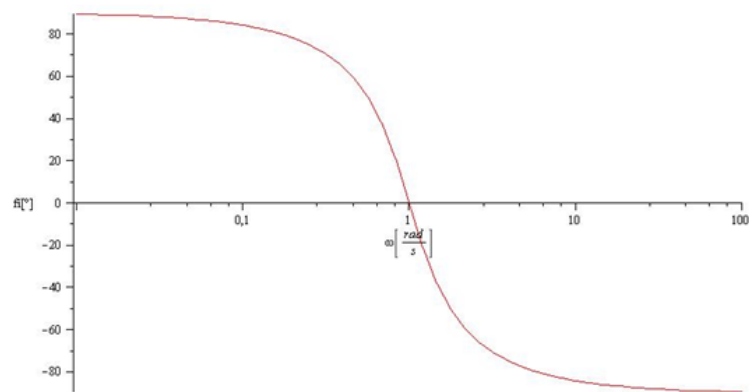
$$A = \frac{1}{1 + j \cdot \omega + \frac{1}{j \cdot \omega}} [-].$$



Obrázek B.7: Graf amplitudové frekvenční charakteristiky RLC sériového obvodu na cívce

Když do rovnice (5.52) dosadíme zadané hodnoty, bude rovnice fázové frekvenční charakteristiky a její graf vypadat následovně:

$$\varphi = -\arctan\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right).$$



Obrázek B.8: Graf fázové frekvenční charakteristiky RLC sériového obvodu na cívce

Graf B.7 se nazývá rezonanční křivka. Rezonance je děj, při kterém frekvence ω dosáhne takové hodnoty, že napětí na cívce a kondenzátoru jsou stejně velká a jejich rozdíl je nulový, takže obvod se chová jako činný odpor.

Nyní si ukážeme, jak rezonanční frekvenci můžeme vypočítat. Vyjdeme z impedance:

$$Z = R + j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right). \quad (\text{B.1})$$

Jak jsme již výše uvedli, rezonance nastane tehdy, když se účinek indukce cívky a kapacity

kondenzátoru navzájem vyruší, tedy platí:

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}. \quad (\text{B.2})$$

Hodnoty indukce L a kapacity C již známe, a tak je dosadíme a vyjádříme si hledanou rezonanční frekvenci. Rovnice (B.3) se nazývá také Thomsonův vzorec.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{B.3})$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1}}$$

$$\omega = 1[\text{rad/s}]$$

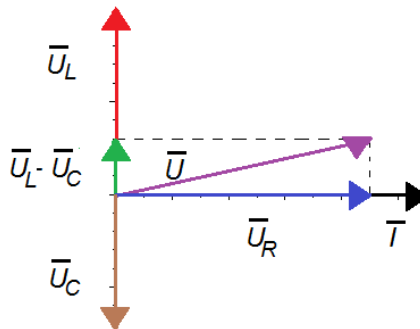
B.5 Příklad RLC sériového obvodu

Příklad 8. Je dán RLC sériový obvod. Zakreslete pomocí fázového diagramu, jak bude vypadat výsledný proud protékající obvodem.

Jak můžeme vyčíst z obrázku 5.4 proud I v RLC sériovém obvodu bude protékat všemi součástkami obvodu stejný, ale napětí na těchto součástkách bude odlišné. Napětí U_L bude proud I předbíhat o 90° , naproti tomu U_C bude proud I zpožděno o 90° . Jediné napětí na odporu U_R bude ve fázi s proudem I . V závislosti na kapacitě kondenzátoru C a indukčnosti cívky L bude mít obvod buď indukční, nebo kapacitní charakter, z tohoto důvodu bude fázový posun kladný (v případě indukčního charakteru) nebo záporný (v případě kapacitního charakteru). Celkové napětí je dáno vzorcem:

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$$

Nejdříve do grafu vyneseme proud I . Víme, že U_R je ve fázi s proudem I , ale U_L a U_C jsou posunuté, jak je vidět na obrázku B.9. Následně od sebe odečteme U_L a U_C a uděláme vektorový součin tohoto nově vzniklého vektoru s U_R . Tak dostaneme výsledné U .



Obrázek B.9: Fázový diagram - RLC sériový obvod

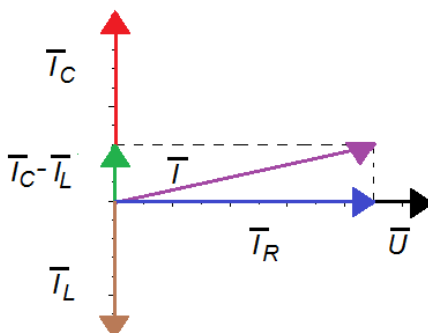
B.6 Příklad RLC paralelního obvodu

Příklad 9. Je dán RLC paralelní obvod. Zakreslete pomocí fázového diagramu, jak bude vypadat výsledný proud protékající obvodem.

U RLC paralelního obvodu je ve všech větvích napětí stejné, oproti tomu proud v každé z větví obvodu protéká různý a vypočítáme ho podle následujícího vzorce:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

Proud I_L protékající cívkou bude opožděn oproti napětí na zdroji o 90° , naproti tomu proud I_C , který protéká kondenzátorem, bude o 90° předbíhat.



Obrázek B.10: Fázový diagram - RLC paralelní obvod

B.7 Příklad RC sériového obvodu

Příklad 10. Je dán RC sériový obvod s parametry $R = 1\Omega$, $C = 1H$ a vstupní napětí $u = \sin(\omega t)$. Vypočítejte tento obvod analytickým způsobem a vyjádřete napětí na kondenzátoru.

Napětí na kapacitě můžeme popsat následující diferenciální rovnicí:

$$u'_C = \frac{i}{C}$$

$$u = u_C + R i$$

$$u'_C = \frac{1}{RC}u - \frac{1}{RC}u_C, a = \frac{1}{RC}$$

Po substituci získáme následující rovnici:

$$u'_C + a u_C = a u$$

Počáteční podmínka:

$$u_C(0) = 0$$

Očekávané řešení:

$$u'_C + a u_C = 0$$

Charakteristická rovnice:

$$\lambda + a = 0$$

$$\lambda = -a$$

Obecné řešení:

$$u_C = K(t)e^{\lambda t}$$

Řešení pravé strany rovnice:

$$u_{C_p} = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$u_{C_p} = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)$$

$$u'_C + au_C = au$$

$$A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) + Aa \sin(\omega t) + Ba \cos(\omega t) = a \sin(\omega t)$$

$$A\omega + Ba = 0$$

$$Aa - B\omega = a$$

$$A = \frac{a^2}{a^2 + \omega^2}$$

$$B = -\frac{a\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Obecné řešení:

$$u_C = K(t)e^{-at} + \frac{a^2}{a^2 + \omega^2} \sin(\omega t) - \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} \cos(\omega t)$$

Partikulární řešení:

$$u_C = \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at} + \frac{a^2}{a^2 + \omega^2} \sin(\omega t) - \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} \cos(\omega t)$$

Očekávaný tvar rovnice po úpravě:

$$u_C = \frac{a}{a^2 + \omega^2} e^{-at} + U \sin(\omega t + \varphi)$$

$$U \sin(\alpha + \beta) = U \sin(\alpha) \cos(\beta) + U \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$U \sin(\omega t + \varphi) = U \sin(\omega t) \cos(\varphi) + U \cos(\omega t) \sin(\varphi)$$

$$U \sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

kde:

$$A = U \cos(\varphi)$$

$$B = U \sin(\varphi)$$

Nyní si vyjádříme napětí U a úhel φ :

$$U = \frac{A}{\cos(\varphi)}$$

$$B = \frac{A}{\cos(\varphi)} \sin(\varphi)$$

$$B = A \tan(\varphi)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$U = \frac{A}{\cos\left(\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right)}$$

a dosadíme je do rovnice:

$$\begin{aligned} U \sin(\omega t + \varphi) &= \frac{A}{\cos\left(\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right)} \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right) = \\ &= \frac{\frac{a^2}{a^2 + \omega^2}}{\cos\left(\arctan\left(\frac{\frac{-a\omega}{a^2 + \omega^2}}{\frac{a^2}{a^2 + \omega^2}}\right)\right)} \sin\left(\omega t + \arctan\left(\frac{\frac{-a\omega}{a^2 + \omega^2}}{\frac{a^2}{a^2 + \omega^2}}\right)\right) = \\ &= \frac{\frac{a^2}{a^2 + \omega^2}}{\cos\left(\arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right)\right)} \sin\left(\omega t + \arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right)\right) \end{aligned}$$

Dosazením $\omega = 1$ a $a = 1$ dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}}{\cos(\arctan(-1))} \sin(t + \arctan(-1)) &= \frac{\frac{1}{2}}{\cos(-45^\circ)} \sin(t - 45^\circ) = \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin(t - 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t - 45^\circ) \end{aligned}$$

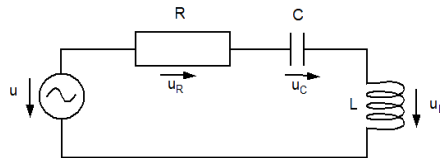
$$u_C = \frac{a\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at} + U \sin(\omega t + \varphi)$$

$$u_C = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t - 45^\circ)$$

$$u_C = \frac{1}{2} \left(e^{-t} + \sqrt{2} \sin(t - 45^\circ) \right)$$

B.8 Příklad RLC sériového obvodu počítaného za pomoci diferenciálních rovnic

Příklad 11. Je dán RLC sériový obvod se střídavým zdrojem napětí. Popište ho pomocí diferenciálních rovnic (včetně počátečních podmínek).



Obrázek B.11: Schéma RLC sériového obvodu

$$u_R = Ri$$

$$u'_C = \frac{1}{C}i$$

- počáteční podmínka: $u_c(0) = 0$

$$i' = \frac{1}{L}u_L$$

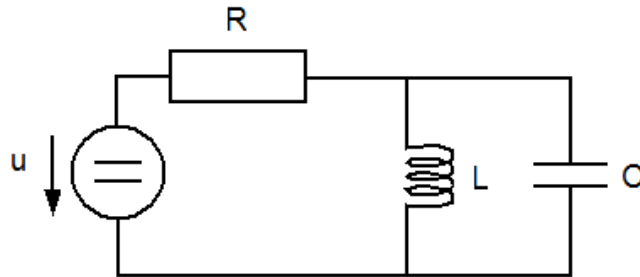
- počáteční podmínka: $i(0) = 0$

$$u_L = u - u_R - u_C$$

Tyto rovnice pak můžeme za pomoci programu TKSL/C jednoduše vypočítat.

B.9 Příklad pro srovnání programů MATLAB, Maple a FAPC - TKSL/C (RLC obvod)

Příklad 12. Je dán RLC obvod ([B.12](#)) s parametry $R = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$ a vstupní napětí $u = 1V$. Vykreslete amplitudovou a fázovou charakteristiku tohoto obvodu (použitím programů a) Maple, b) MATLAB a c) FAPC - TKSL/C).



Obrázek B.12: Schéma RLC obvodu

a) Zdrojový kód pro Maple

```

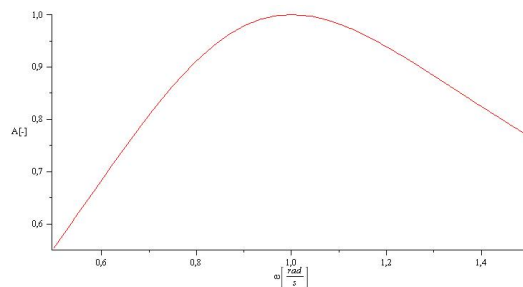
R := 1; L := 1; C := 1; u := 1;
      
$$\frac{I \cdot \omega \cdot L}{I \cdot \omega \cdot C}$$

Z := R + 
$$\frac{I \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{I \cdot \omega \cdot C}}{I \cdot \omega \cdot C}$$
;

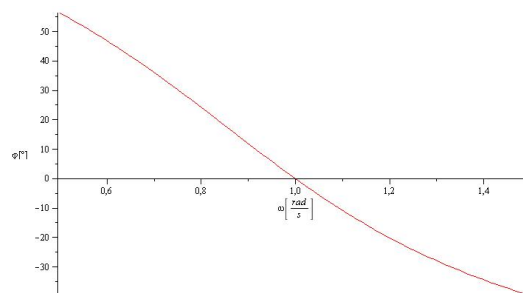
I0 :=  $\frac{u}{Z}$ ;
ur := R · I0;
uc := u - ur;
plot(sqrt(ℜ(uc)2 + ℑ(uc)2), ω = 0.5 .. 1.5);
plot( $\frac{\arctan\left(\frac{\Im(uc)}{\Re(uc)}\right) \cdot 180}{\pi}$ , ω = 0.5 .. 1.5);

```

Výsledné grafy:



Obrázek B.13: Amplitudová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program Maple)

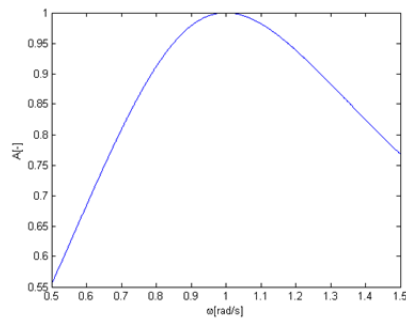


Obrázek B.14: Fázová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program Maple)

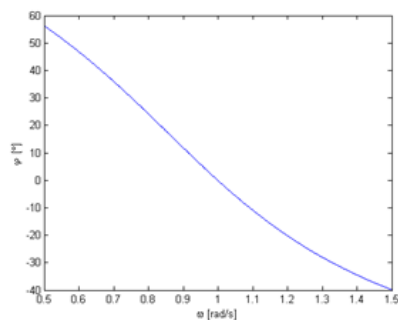
b) Zdrojový kód pro MATLAB

```
R=1,L=1,C=1,u=1,omega=0.5:0.001:1.5;
ur=(R.*u./(R+(j.*omega.*L./(j.*omega.*C))./(j.*omega.*L +1./(j.*omega.*C))));
uc=u-ur;
figure (1)
plot(omega,sqrt(imag(uc).^2+real(uc).^2));
xlabel('\omega[rad/s]');
ylabel('A[-]');
figure (2)
plot(omega,arctan(imag(uc)./real(uc)).*180./pi);
xlabel('\omega [rad/s]');
ylabel('$\varphi$ [$^\circ$'],'Interpreter','latex');
```

Výsledné grafy:



Obrázek B.15: Amplitudová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program MATLAB)

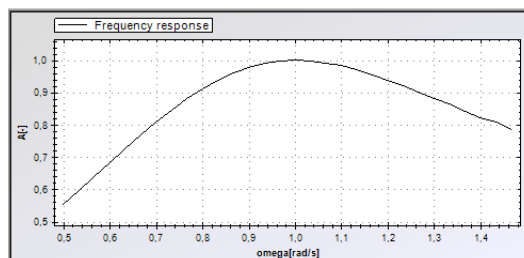


Obrázek B.16: Fázová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program MATLAB)

c) Zdrojový kód pro FAPC - TKSL/C

```
R = 1;
L = 1;
C = 1;
u = sin(0.5*t);
uc' = (1/C)*((1/R)*(u-uc)-iL) &0;
iL' = (1/L)*uc &0;
```

Výsledné grafy:

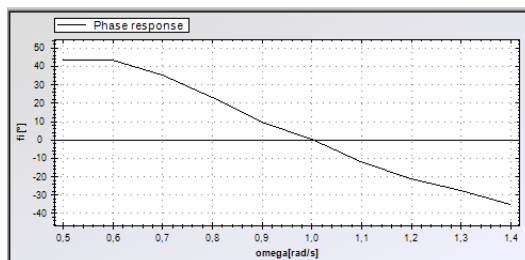


Obrázek B.17: Amplitudová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program FAPC - TKSL/C)

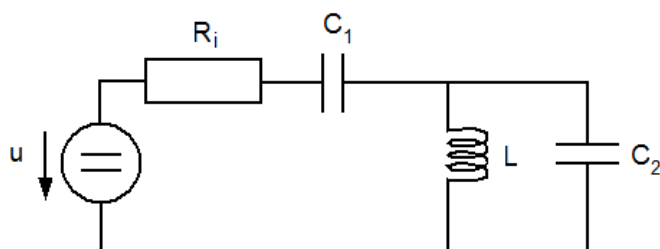
B.10 Příklad pro srovnání programů MATLAB, Maple a FAPC - TKSL/C

Příklad 13. Je dán obvod (B.19) s parametry $R_i = 1\Omega$, $C_1 = 1F$, $L = 1H$, $C_2 = 1F$ a vstupní napětí $u = 1V$. Vykreslete amplitudovou a fázovou charakteristiku tohoto obvodu (použitím programů a) Maple, b) MATLAB a c) FAPC - TKSL/C).

a) Zdrojový kód pro Maple



Obrázek B.18: Fázová frekvenční charakteristika RLC obvodu (program FAPC - TKSL/C)



Obrázek B.19: Schéma obvodu

Výsledné grafy:

b) Zdrojový kód pro MATLAB

```
Ri=1,C1=1,L=1,C2=1,u=1,omega=0.5:0.001:1.5;
I=u./(Ri+1./(j.*omega.*C1)+(j.*omega.*L./(j.*omega.*C2))./(j.*omega.*L+1./
(j.*omega.*C2)));
uri=Ri*I;
uc1=I./(j.*omega.*C1);
uc2=u-uri-uc1;
figure (1)
plot(omega,sqrt(imag(uc2).^2+real(uc2).^2));
xlabel('\omega[rad/s]');
ylabel('A[-]');
figure (2)
plot(omega,arctan(imag(uc2)./real(uc2)).*180./pi);
xlabel('\omega [rad/s]');
ylabel('$\varphi$ [$^\circ$'],'Interpreter','latex');
```

Výsledné grafy:

c) Zdrojový kód pro FAPC - TKSL/C

```
Ri = 1;
```

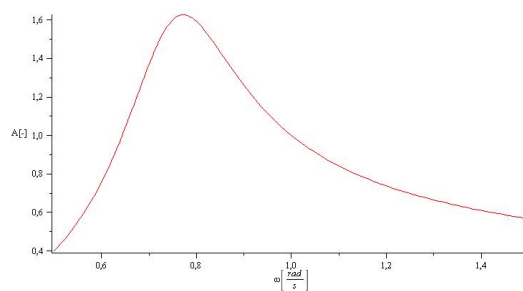
```

Ri := 1; C1 := 1; L := 1; C2 := 1; u := 1;

$$Z := Ri + \frac{1}{I \cdot \omega \cdot C1} + \frac{\frac{I \cdot \omega \cdot L}{I \cdot \omega \cdot C2}}{I \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{I \cdot \omega \cdot C2}};$$

I0 :=  $\frac{u}{Z}$ ;
uri := Ri · I0;
uc1 :=  $\frac{I0}{I \cdot \omega \cdot C1}$ ;
uc2 := u - uri - uc1;
plot(sqrt(ℑ(uc2)2 + ℑ(uc2)2), ω = 0.5 .. 1.5);
plot( $\frac{\arctan\left(\frac{\Im(uc2)}{\Re(uc2)}\right) \cdot 180}{\pi}$ , ω = 0.5 .. 1.5);

```



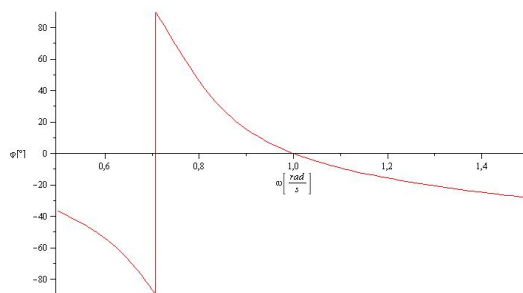
Obrázek B.20: Amplitudová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program Maple)

```

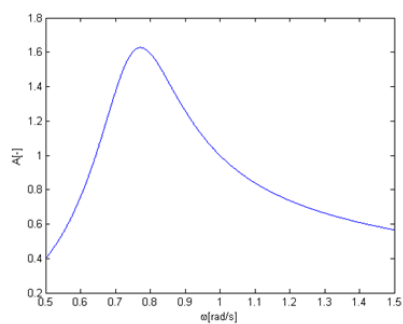
C1 = 1;
L = 1;
C2 = 1;
u = sin(1.5*t);
iL' = (1/L)*uc2 &0;
uc1' = (1/C1)*ic1 &0;
uc2' = (1/C2)*ic2 &0;
ic1 = (1/Ri)*(u-uc1-uc2);
ic2 = ic1-iL;

```

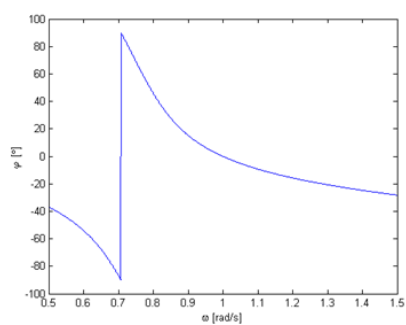
Výsledné grafy:



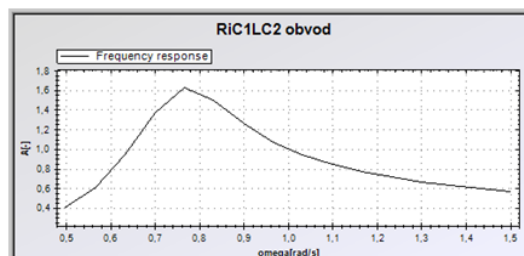
Obrázek B.21: Fázová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program Maple)



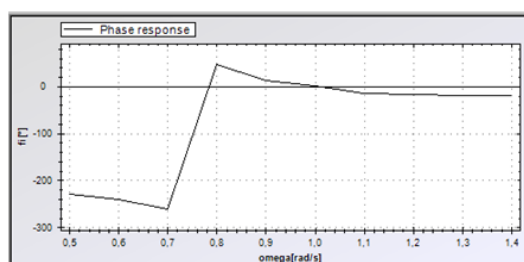
Obrázek B.22: Amplitudová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program MATLAB)



Obrázek B.23: Fázová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program MATLAB)



Obrázek B.24: Amplitudová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program FAPC - TKSL/C)



Obrázek B.25: Fázová frekvenční charakteristika RiC1LC2 obvodu (program FAPC - TKSL/C)

Příloha C

Obsah CD

Příložené CD obsahuje:

- soubor BP_TURONOVA.pdf – technická zpráva bakalářské práce,
- složku BP_PROGRAM – zdrojové kódy a další soubory bakalářské práce.